Der Titel der Diplomarbeit wird voraussichtlich sein "Eine hinreichend Bedingung fr die starke minimalitt von kompaktenMinimalflchen".Eine Minimalflche $M$, das heit eine $n$-dimensionale Hyperflche mit Rand, die die notwendige Bedingung, da die die mittlereKrmmung $H$ auf $M$ identisch verschwindet, ist im allgemeinen keinMinimum des Flcheninhales in der Kalasse aller Funktionen, die den gleichen Rand haben wie $M$. In dieser Arbeit aknn ich zeigen, da $M$ ein starkes Minimum des Flcheninhaltes ist, falls der Jacobioperator von $M$ nur echt positive Eigenwerte hat. Ich fhre dabei die starke minimalitt von $M$ auf die Existenz eine Kalibrierung auf einer offenen Tubenumgebung von $M$ und dann auf die Existenz einer Bltterung dieser Tubenumgebung in Minimalflchen zurck. Diese Bltterung wird dann im zweiten Teil der Arbeit unter der oben gennanten Voraussetzung an den Jacobioperator konstruiert. Ich greife in dieser Arbeit eine Methode von Nathan Smale auf, mit der Minimalflchen in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch kleine Strungen von Flchen mit 'kleiner' mittlerer Krmmung konstruiert werden, und verallgemeinere sie auf den Fall von Hyperflchen in glatten Mannigfaltigkeiten. Das Problem $H \equiv 0$ auf $M$ wind umgeschrieben in ein Fixpunktproblem der Form $T(x) = x$, dann werden durch Abschtzungen fr die Operatoren $H$ und $T$ auf gewissen kompakten Mengen $\mathcal{K}(\sigma, \alpha)$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes nachgewiesen. Fr die Verallgemeinerung auf Untermannigfaltigkeiten von glatten Mannigfaltigkeiten mute ich eine globale Darstellung der mittleren Krmmung finden und fr diese hnliche Abschtzungen erhalten, die dann die Konvergenz des Banachschen Fixpunktsatzes fhren.

Zur Konstruktion einer Bltterung von Minimalflchen wird dann die Schar der Parallelflchen von $M$ in eine Schar von Minimalflchen 'verbogen'. Aus dem Maximumsprinzip fr lineare partielle Diffenzialoperatoren ergeben sich dann die Eigenschaften fr die Bltterung.

Ein groer Reiz an dieser Arbeit war, da ish hier Methoden und ergebnisse aus mehreren verschieden Gebieten der Mathematik zu einer Art globalen Variationsrechnungr verbinden konnte.

# 1 Einfhrung

In dieser Arbeit betrachten wir das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(f) = \int_M \Phi(d_p f)\, d\mathrm{vol}$$

mit einer Lagrangeschen

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}M, \boldsymbol{T}\widetilde{M}) \longrightarrow \mathrm{I\!R}$$

der Klasse $\mathcal{C}^2$. Dabei ist $f\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung von einer kompakten $n$-dimesnionalen Mannigfaltigkeit $M$ in eine glatte $n+1$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$. $\mathcal{F}$ schreibt sich in lokalen Koordinaten als ein Funktional

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))dx$$

mit einer $\mathcal{C}^2$-Lagrangeschen

$$F\colon \Omega \times \mathrm{I\!R}^n \times \mathrm{I\!R}^N \longrightarrow \mathrm{I\!R}$$

und $N = n+1$ und verallgemeinert deswegen $I$.
Ein lokales Minimum von $\mathcal{F}$ in der Klasse der Funktionen mit gleichem Rand ist ein kritischer Punkt $f$ von $\mathcal{F}$ und deswegen eine Lsung der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$L(f) = 0 \ .$$

Wir geben eine hinreichende Bedingung dafr, da eine Lsung $f$ der Euler-Lagrange-Gleichungen ein Minimum von $\mathcal{F}$ ist:
Ist der kleinste Eigenwert $\lambda$ der zweiten Variation von $\mathcal{F}$ an der Stelle $f$ positiv, so ist $f$ ein starkes homologisches Minimum von $\mathcal{F}$ zu eigenen Randwerten. Ist dagegen $\lambda < 0$, so ist $f$ kein lokales Minimum von $\mathcal{F}$.
Fr den Fall von nichtparametrisch gegebenen Extremalen, das heit, fr Graphen von Funktionen $f\colon \Omega \longrightarrow \mathrm{I\!R}$ stammt das hier angegebene Resultat im wesentlichen von L. Lichtenstein [LL], der fr $\dim \Omega = 2$ Funktionale mit analytischem Integranden $F$ betrachtet hat. Die bertragung auf den Fall mehrdimensionaler Variationsprobleme stammt von C. B. Morrey [M]; einige Vereinfachungen wurden von S. Hildebrandt [HS1],[HS2] und X. LI [LX] angegeben. Die Verallgemeinerung auf den Fall von

kompakten immersierten Hyperflchen der Kodimension 1 in glatten Riemannschen Mannigfaltigkeiten wurde von mir ausgefhrt.
Um starke homologische Minimalitt zu zeigen, zeigen wir die Existenz eines Feldes, das heit einer ausreichend glatten Bltterung aus Extremalen. Dieses Feld konstruieren wir im allgemeinen Fall mit einer Methode, wie sie S. Hildebrandt in [HS2] fr den Fall nichtparametrischer Extremaler benutzt. Den Fall von immersierten Minimalflchen im $\mathbb{R}^{n+1}$ behandeln wir gesondert. Wir konstruieren das Feld, indem wir die Schar der Parallelflchen durch geeignete kleine Strungen in ein Feld von Minimalflchen Feld von Minimalflchen 'verbiegen'. N. Smale hat in [SN] eine Minimalflche erhalten indem er eine 'Fast-Minimalflche' in eine Minimalflche 'verbogen' hat.
Ich danke ... blabla.

# 2 Notation und Grundlagen "BLA

## 2.1 Differentialgeometrische Grundlagen

In dieser Arbeit bezeichne $M$ immer eine $n$-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand, das heit einen Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine Umgebung $U$ besitzt, die homomorph zu einer offenen Teilmenge $V$ in $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ ist. Dieser Homomorphismus $\varphi: U \longrightarrow V$ heit eine Karte von $M$. Ein System von Karten, deren Definitionsbereiche $M$ berdecken, heit ein Atlas von $M$. Sind alle Kartenwechsel $\varphi \circ \psi^{-1}$ stets $\mathcal{C}^{k,\alpha}$-Diffeomorphismen, so heit $M$ eine $\mathcal{C}^{k,\alpha}$-Mannigfaltigkeit. Ein Punkt $p \in M$ mit $\varphi(p)$ im Rand von $\mathbb{R}^n_+$ heit Randpunkt, sonst innerer Punkt von $M$. Der Rand $\partial M$ ist die Gesamtheit der Randpunkte, das Innere $M^\circ$ die der inneren Punkte von $M$. Eine Abbildung $f: M \longrightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten heie vom Typ $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, falls fr alle Karten $\varphi$ von $M$ und $\psi$ von $N$ die lokale Beschreibung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ vom Typ $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ ist.
Vektorraumbndel $\pi: \boldsymbol{E} \longrightarrow M$ bezeichnen wir auch kurz mit $\boldsymbol{E}$, falls keine Mehrdeutigkeit zu befrchten ist. Insbesondere hat jede Faser $\boldsymbol{E}_p := \pi^{-1}(p)$ eine lineare Struktur. Ein Vektorraumbndel heit normiert, falls auf jeder Faser eine Norm erklrt ist. Im folgenden bezeichne $\boldsymbol{T}M$ immer das Tangentialbndel und $\boldsymbol{T}^*M$ das Kotangentialbndel an $M$.
Die Exponentialabbildung exp: $\boldsymbol{T}M \longrightarrow M$ ist durch $\exp_p(v) := \gamma(1)$ erklrt. Dabei ist $v \in \boldsymbol{T}_pM$ und $\gamma(t)$ die Geodtische mit Anfangspunkt $p$ und $\frac{d\gamma}{dt}\big|_{t=0} = v$. $\exp_p$ ist

differenzierbar in $v$ und $p$ und bildet eine Nullumgebung in $\boldsymbol{T}_pM$ diffeomorph auf eine Umgebung von $p$ in $M$ ab. Eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $u\colon M \longrightarrow \boldsymbol{E}$ heit ein $\mathcal{C}^k$-Schnitt in $\boldsymbol{E}$, falls $u \circ \pi = \mathrm{id}_M$. $\mathcal{C}^k(M, \boldsymbol{E})$ bezeichne die Menge aller $\mathcal{C}^k$-Schnitte in $\boldsymbol{E}$, es ist insbesiondere nicht die Menge aller $\mathcal{C}^k$-Abbildungen von $M$ in die Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{E}$ gemeint. Schnitte in $\boldsymbol{T}M$ heien Vektorfelder auf $M$.
Eine Riemannsche Metrik $g$ auf $M$ ist ein $\mathcal{C}^\infty$-Schnitt in $\boldsymbol{T}^*M \otimes \boldsymbol{T}^*M$, so da $g_p$ auf $\boldsymbol{T}_pM$ fr alle $p \in M$ ein positiv definites Skalarprodukt ist. Die innere Metrik $d(x, y)$ auf $M$ ist als das Infimum der Lngen aller Kurven mit Endpunkten $x$ und $y$ gegben, der Durchmesser von $M$ als das Supremum aller Abstnde $d(x, y)$ auf $M$. $M$ heit vollstndig, falls $(M, d)$ als metrischer Raum vollstndig ist. Abgeschlossene, beschrnkte Teilmengen von $M$ sind dann kompakt, alle Geodtischen sind unendlich verlngerbar. Ist $M$ auerdem zusammenhngend, so kann man je zwei Punkte $p$ und $q$ auf $M$ durch eine Geodtische der Lnge $d(p, q)$ verbinden.
Im folgenden sei $\widetilde{M}$ immer eine vollstndige, $n+1$-dimensionale Riemannsche $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit mit Metrik $\widetilde{g}$.
Eine $\mathcal{C}^1$- Abbildung $f\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ heit Immersion, falls fr alle $p \in M$ die induzierte Tangentialabbildung $\partial f\big|_p\colon \boldsymbol{T}_pM \longrightarrow \boldsymbol{T}_p\widetilde{M}$ lokal injektiv ist. Dann ist $f$ nach dem Satz ber implizite Funktionen auch lokal umkehrbar. Eine Immersion $f$ heit Einbettung, falls sie injektiv ist. $M$ trage immer die induzierte Metrik $g$, das heit $g(X, Y) = \widetilde{g}(f_*X, f_*Y)$. $M$ heit immersierte Untermannigfaltigkeit in $\widetilde{M}$.
Das Tangentialbndel von $\widetilde{M}$, eingeschrnkt auf $M$, lt sich aufspalten in $\boldsymbol{T}\widetilde{M}\big|_M = \boldsymbol{T}M \oplus \boldsymbol{N}M$; dabei ist $\boldsymbol{N}M$ das Normalenbndel auf $M$; das heit, jeder Vektor $X \in \boldsymbol{T}_p\widetilde{M}$ lt sich aufspalten in $X = X^T + X^N$.
$\widetilde{\nabla}$ sei der durch $\widetilde{g}$ auf $\widetilde{M}$ gegebene Levi-Civitta Zusammenhang. Auf $M$ ist durch

$$\nabla_X Y := \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^T$$

ein linearer Zusammenhang definiert, es ist der Levi-Civitta Zusammenhang von $M$.
Die zweite Fundamentalform $\mathcal{B} \in \mathcal{C}^\infty(M, \boldsymbol{T}^*M \otimes \boldsymbol{T}^*M \otimes \boldsymbol{N}M)$ auf $M$ wird gegeben durch

$$\mathcal{B}(X, Y) := \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^N.$$

Wegen

$$\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^N = \left(\widetilde{\nabla}_X Y + [X, Y]\right)^N = \left(\widetilde{\nabla}_Y X\right)^N$$

ist $\mathcal{B}_p$ symmetrische, bilineare Abbildung von $\boldsymbol{T}_pM \times \boldsymbol{T}_pM$ nach $\boldsymbol{N}_pM$. Man definiert also

$$H_p := \frac{1}{n}\mathrm{Spur}(\mathcal{B}_p)$$

$H$ ist ein glattes Normalenfeld auf $M$ und heit Mittlere Krmmung von $M$.

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

bezeichne den Krmmungstensor von $M$. Wir werden im fogenden die Identitten $R(X,Y) = R(Y,X)$ und $< R(X,Y)Z, W >=< R(Z,W)X, Y >$ bentigen.
Auf $M$ ist durch die Volumenform kanonisch ein Ma $d$vol gegeben, wir integrieren im folgenden immer ber $d$vol falls die Integrale nicht anders gekennzeichnet sind.

## 2.2 Funktionenrume

**Definition 2.2.1** Ein Schnitt $f$ in einem normierten Bndel $\boldsymbol{E}$ ber $M$ heit **integrabel**, falls $\|f\|$ als Funktion auf $M$ integrabel ist.
Fr $0 \le p \le \infty$, $0 \le \alpha \le 1$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir folgende Normen

$$\begin{aligned}
|f|^p_{L^p(M,\boldsymbol{E})} &:= \int_M \|f\|^p \\
|f|_{\mathcal{C}^0(M,\boldsymbol{E})} &:= \sup_{x\in M} \|f(x)\| \\
|f|_{\mathcal{C}^k(M,\boldsymbol{E})} &:= \sum_{i=1}^{k} |\nabla^i f|_{\mathcal{C}^0}
\end{aligned}$$

Fr $x, y \in M$ und $V \in \pi^{-1}(x)$ sei $p_y(V)$ die Parallelverschiebung von $V$ in den Punkt $y$ lngs einer Kurve von $x$ nach $y$.

$$|f|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(M,\boldsymbol{E})} := |f|_{\mathcal{C}^k(M,\boldsymbol{E})} + \sup_{x,y\in M} \frac{\|p_y(f(x)) - f(y)\|}{d(x,y)}$$

**Lemma 2.2.2** Whlt man einen endlichen Atlas $\mathcal{A} = \{x_i : U_i \longrightarrow V_i, i \in I\}$ fr $M$, so ist $\boldsymbol{E}\big|_{U_i}$ diffeomorph zu $V_i \times F$, wobei $F := \pi^{-1}(p)$ fr ein $p \in U_i$. Man kann dann die obigen Normen folgenderweise quivalent definieren:

$$\begin{aligned}
|f|^p_{L^p(M,\boldsymbol{E})} &:= \sup_i |F_{ij}|_{L^p(V_i,F)} \\
|f|_{\mathcal{C}^0(M,\boldsymbol{E})} &:= \sup_i |F_i|_{\mathcal{C}^0(V_i,F)} \\
|f|_{\mathcal{C}^k(M,\boldsymbol{E})} &:= \sup_j |F_i|_{\mathcal{C}^k(V_i,F)} \\
|f|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(M,\boldsymbol{E})} &:= |f|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(V_i,F)}
\end{aligned}$$

**Beweis** Siehe [BC].

**Lemma 2.2.3** Die Vektorrume

$$\begin{aligned} L^p(M,\boldsymbol{E})&:=\{\text{f ist integrabel und } |f|_{L^p(M,\boldsymbol{E})}<\infty\}\\ \mathcal{C}^k(M,\boldsymbol{E})&:=\{|f|_{\mathcal{C}^k(M,\boldsymbol{E})}<\infty\}\\ \mathcal{C}^k_0(M,\boldsymbol{E})&:=\{|f|_{\mathcal{C}^k(M,\boldsymbol{E})}<\infty, f\big|_{\partial M}=0\}\\ \mathcal{C}^{k,\alpha}(M,\boldsymbol{E})&:=\{|f|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(M,\boldsymbol{E})}<\infty\}\\ \mathcal{C}^{k,\alpha}_0(M,\boldsymbol{E})&:=\{|f|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(M,\boldsymbol{E})}<\infty, f\big|_{\partial M}=0\} \end{aligned}$$

sind mit den oben definierten Normen separable Banachrume.

**Definition 2.2.4** $H^{k,p}(M,\boldsymbol{E})$ ist die Vervollstndigung von $\mathcal{C}^\infty(M,\boldsymbol{E})$ und $H^{\circ k,p}(M,\boldsymbol{E})$ die von $\mathcal{C}^\infty_0(M,\boldsymbol{E})$ bezglich der Norm

$$|f|_{H^{k,p}(M,\boldsymbol{E})}:=\sum_{i=0}^k|\nabla^i f|_{L^p(M,\boldsymbol{E})}.$$

**Bemerkung 2.2.5** Wie im Fall von Funktionenrumen ber Gebieten $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ist $H^{k,p}(M,\boldsymbol{E})=L^p(M,\boldsymbol{E})$
Wenn die Fasern von $\boldsymbol{E}$ ein Skalarprodukt tragen, etwa eine Riemannsche Metrik, so ist $L^2(M,\boldsymbol{E})$ ein Hilbertraum in dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{L^2}:=\int_M<u(x),v(x)>_E.$$

Fr $p>1$ sind $H^{k,p}(M,\boldsymbol{E})$ und $H^{\circ k,p}(M,\boldsymbol{E})$ separable Banachrume.

## 2.3 Tubenumgebung und induzierte Mannigfaltigkeit

**Lemma 2.3.1** *Ist $f\colon M\longrightarrow\widetilde{M}$ immersierte Untermannigfaltigkeit der Kodimension $k$, so gibt es ein $r>0$ und eine Immersion* **“TUBENUM**

$$\tau\colon M\times B_r(0)\longrightarrow\mathcal{T}_r(f)\subset\widetilde{M}$$

*auf eine Umgebung von $f(M)=\tau(M\times\{0\}$. Dabei ist $B_r(0)$ der offene Einheitsball in $\mathbb{R}^k$. Ist $M$ eingebettet, so ist $\mathcal{T}_r(f)$ vermge $\tau$ diffeomorph zu $M\times B_r(0)$.*

**Definition 2.3.2** $\mathcal{T}_r(f)$ heit **Tubenumgebung von** $M$.

**Beweis** Das Normalenbndel ist lokal trivial, das heit in einer Umgebung $U \subset M$ von $p \in M$ ist $\boldsymbol{N}U$ bndelisomorph zu $U \times \mathbb{R}^k$. Wir betrachten deswegen die Abbildung $\Gamma\colon \boldsymbol{N}U \longrightarrow \widetilde{M}$ mit $\Gamma(p,v) := \exp_p v$. Wegen der Vollstndigkeit von $\widetilde{M}$ und der Differenzierbarkeit von exp ist $\Gamma$ wohldefiniert und differenzierbar auf $M \times \mathbb{R}^k$. Offensichtlich ist $\partial\Gamma\big|_{(p,s)} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{T}_p\widetilde{M}}$, deswegen ist $\Gamma$ auf $M \times B_r(0)$ lokal umkehrbar.
Angenommen, $M$ ist eingebettet aber $\tau\colon M \times B_r(0) \longrightarrow \mathcal{T}_r(f) := \mathrm{Im}(\tau)$ ist kein Diffeomorphismus. Dann gbe es $Q_i = \tau(\widetilde{p}_i, \widetilde{s}_i) = \tau(p_i, s_i)$ mit $\lim \widetilde{s}_i = \lim s_i = 0$. Dann konvergieren, nachdem man eventuell zu einer Teilfolge bergegangen ist, die $Q_i$ gegen ein $Q \in f(M)$, also ist auch $\lim \widetilde{p}_i = \lim p_i = Q$. $\Gamma$ ist aber auf einer ganzen Umbebung von $Q$ injektiv. □

**Korollar 2.3.3** *Sei $f\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ kompakte, immersierte, orientierbare Untermannigfaltigkeit. Fr alle Schnitte $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(M, \boldsymbol{N}M)$ mit $|u|_{\mathcal{C}^0} < r$, ist $f_u(x) := \tau \circ u(x) = \exp_{f(x)} u(x)$ eine $\mathcal{C}^{k,\alpha}$-Immersion.*

**Bemerkung 2.3.4** Fr $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ ist $f_u = f + u \circ f$, wenn man $\boldsymbol{T}_p\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbb{R}^{n+1}$ identifiziert..

**Definition 2.3.5** $M_u := f_u(M)$ heit die **durch $u$ induzierte Mannigfaltigkeit.**

**Bemerkung 2.3.6** Ist $M$ eingebettet, so ist auch $M_u$ eingebettet. Fr $u \in \mathcal{C}_0^1(M, \boldsymbol{N}M)$ ist $\partial M_u = \partial M$.

**Definition 2.3.7** Die durch den konstanten Schnitt $s\nu \in \mathcal{C}^\infty(M, \boldsymbol{N}M)$ induzierte Mannigfaltigkeit $M_s := M_{s\nu}$ heit die **Parallelfche zur Entfernung $s$ von $M$.**

## 2.4 Differentialoperatoren

**Definition 2.4.1** Wir definieren die 'musikalischen' Isomorphismen

$$(\cdot)^\flat\colon \boldsymbol{T}M \longrightarrow \boldsymbol{T}^*M$$
$$(\cdot)^\sharp\colon \boldsymbol{T}^*M \longrightarrow \boldsymbol{T}M$$

durch $g(X, \omega^\#) = \omega(X)$ und $X^\flat := g(X, \cdot)$.

**Definition 2.4.2** (Kontraktion) Ist $A$ ein (1,1)-Tensorfeld auf $M$, das heit, $A \in \boldsymbol{T}^* M \otimes \boldsymbol{T} M$, so definieren wir

$$C_{1,2}(A)_p \colon= \mathrm{Spur}(x \longmapsto A(x))$$

$C_{1,2}(A)$ heit die Kontraktion von $A$ und ist offensichtlich ein auf $M$ global definierte Funktion. Im Folgenden betrachen wir die Kontraktion $C_{i,j}$ des $i$-ten (kovarianten) Arguments, mit dem $j$-ten (kontravarianten), das einem $(k,l)$-Tensorfeld ein $(k-1, l-1)$-Tensorfeld zuordnet.

**Definition 2.4.3** Sei $M$ Riemannsche Mannigfaltigkeit, $0 \neq a \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{T}^* M \otimes \boldsymbol{T}^* M)$, $b \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{T}^* M)$ und $c \in \mathcal{C}^0(M)$.
Ein **linearer Differentialoperator der Ordnung 2** ist eine Abbildung der Form

$$u \mapsto A(u) = C_{1,3}C_{2,4}(a\nabla^2)u + C_{1,2}(b\nabla)u + cu.$$

Dabei ist $C_{i,j}$ die Kontraktion des $i$-ten mit dem $j$-ten Elements.
$A$ heit **elliptisch**, falls es fr alle $x \in M$ ein $\lambda(x) > 0$ gibt, so da

$$\lambda(x)^{-1}|\xi|^2 \leq a(\xi, \xi) \leq \lambda(x)|\xi|^2.$$

$A$ heit **gleichmig elliptisch** falls $\lambda(x) > \lambda$ fr ein festes $\lambda > 0$.

**Bemerkung 2.4.4** Wegen der Unabhngigkeit der Kontraktion von der Kartenwahl ist der obige Ausdruck wohldefiniert.

**Lemma 2.4.5** *In einer lokalen Karte $\varphi \colon U \longrightarrow V$ von $M$ hat $A$ die Form*

$$A_\varphi(u \circ \varphi^{-1}) = a_\varphi^{ij} D_i D_j (u \circ \varphi^{-1}) + b_\varphi^i D_i (u \circ \varphi^{-1}) + c_\varphi (u \circ \varphi^{-1}).$$

**Beweis**

$$\begin{aligned}
A(u) =& a(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} u + b(\tfrac{\partial}{\partial x_i}) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} u + cu \\
=& a(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + a(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial x_j} u \\
&+ b(\tfrac{\partial}{\partial x_i}) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} u + cu \\
=& a(\tfrac{\partial}{\partial x_i} \tfrac{\partial}{\partial x_j}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + (a(\tfrac{\partial}{\partial x_k}, \tfrac{\partial}{\partial x_l}) \Gamma_{kl}^i \tfrac{\partial}{\partial x_i} u + b(\tfrac{\partial}{\partial x_i})) \tfrac{\partial}{\partial x_i} u + cu.
\end{aligned}$$

Whlt man jetzt

$$a^{ij}_\varphi := a(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j})$$
$$b^i_\varphi := b(\tfrac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{k,l=1}^n a(\tfrac{\partial}{\partial x_k}, \tfrac{\partial}{\partial x_l})\Gamma^i_{kl}$$
$$c_\varphi := c,$$

so erhlt man die Behauptung. □

**Bemerkung 2.4.6** $A$ ist (gleichmig) elliptisch, wenn $A$ als Differentialoperator ber $V$ (gleichmssig) elliptisch ist.
Man kann alle global definierten linearen Abbildungen, die in lokalen Koordinaten Differentialoperatoren zweiter Ordnung sind, in dieser Form schreiben.

**Definition 2.4.7** Der durch $\triangle := \mathrm{Spur}\nabla\nabla$ gegebene Differentialoperator $\triangle: \mathcal{C}^2(M) \longrightarrow \mathcal{C}^0(M)$, heit der Laplace-Beltrami-Operator auf $M$. Er ist offensichtlich gleichmig elliptisch.

**Lemma 2.4.8** *In lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ in einer Ungebung um $p$ ist*"**LAPLACELOC**

$$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

**Beweis** Siehe [B] p. 45.

**Lemma 2.4.9** *Ist $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ isometrische Immersion, so ist* "**HLAPLACE**

$$H = \triangle f = (\triangle f_1, \ldots, \triangle f_{n+1}).$$

**Beweis** Seien $v_i$ ein lokaler orthonormaler Rahmen auf einer Kartenumgebung $U$ und $\widetilde{\nabla}$ der euklidische Zusammenhang auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\triangle f_j &= \nabla_{v_i}(\nabla_{v_i} f_j) \\
&= v_i v_i(f_j) - \nabla_{v_i} v_i(f_j) \\
&= df(v_i)df(v_i)(y_j) - \nabla_{v_i} v_i(f_j) \\
&= \widetilde{\nabla}_{df(v_i)} df(v_i) y_j - \widetilde{\nabla}^T_{df(v_i)} df(v_i) y_j \\
&= \widetilde{\nabla}^N_{df(v_i)} df(v_i) y_j \\
&= H(y_j) = H_j\ .
\end{aligned}$$

□

## 2.5 Stze aus der Funktionalanalysis

**Satz 2.5.1** (Rademacher) *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so ist $f$ $\mathcal{H}^n$-fast berall differenzierbar in $U$.* **“RADEMACHE**

**Beweis** Siehe [SL] Seite 30.

**Satz 2.5.2** (Einbettungssatz von Sobolev) *Seien $m \geq 1$, $1 \leq p < \infty$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ so, da $m - \frac{n}{p} \geq k + \alpha$. Dann existiert eine stetige Einbettung* **“SOBOLEV**

$$J\colon H^\circ(\boldsymbol{N}M) \longrightarrow C^{k,\alpha}(\boldsymbol{N}M)$$

*Fr $m - \frac{n}{p} > k + \alpha$ ist diese Einbettung sogar kompakt.*

**Beweis** Siehe [A] p. 44.

Aus den Schauderschranken und den $L^p$-Abschtzungen fr Gebiete in $\mathbb{R}^n$ folgen die entsprechenden Abschtzungen fr eine kompakte Mannigfaltigkeit $M$. Man betrachtet dazu die Differentialoperatoren in lokalen Koordinaten. Wegen der Kompaktheit reicht es, endlich viele lokale Koordinatensysteme zu betrachten. Die Konstanten in den Abschtzungen sind dann das Maximum der Konstanten in den lokalen Koordinaten. Man erhlt also die folgenden Stze.

**Satz 2.5.3** (Schauderschranken) *Sei $A$ linearer elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung, dann gilt* **“SCHAUDERSC**

$$|u|_{C^{2,\alpha}(M,\boldsymbol{N}M)} \leq C\big(|A(u)|_{C^{0,\alpha}(M,\boldsymbol{N}M)} + |u|_{C^{0,\alpha}(M,\boldsymbol{N}M)}\big)$$

**Satz 2.5.4** ($L^p$-Theorie) *Fr einen linearen elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung $A$ gilt* **“LPAB**

$$|u|_{H^{2,p}(M,\boldsymbol{N}M)} \leq C\big(|A(u)|_{L^p(M,\boldsymbol{N}M)} + |u|_{L^p(M,\boldsymbol{N}M)}\big)$$

**Satz 2.5.5** (Maximumsprinzip) *Sei $M$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. $A(u) = a\nabla\nabla u + b\nabla u + cu$ sei ein linearer gleichmig elliptischer Differentialoperator mit beschrnkten Koeffizienten und $c \leq 0$. Eine $\mathcal{C}^2$-Lsung der Gleichung $A(u) = 0$ ist dann entweder konstant oder sie nimmt ihr Maximum auf $\partial M$ an.* “MAXPRINZ

**Beweis** Fr jeden Punkt $p \in M^\circ$ gibt es lokale Koordinaten $\varphi: U \longrightarrow V$ mit $p \in U^\circ$. $A_\varphi$ ist dann ein linearer gleichmig elliptischer Differentialoperator ber $V$ mit $c_\varphi = c \leq 0$. Nach dem Hopfschen Maximumsprinzip (siehe z. B. [GT]) ist $u \circ \varphi^{-1}$ konstant auf $V$ oder nimmt das Maximum in $\partial U$, also nicht in $p$, an. $\square$

**Satz 2.5.6** (Spektralsatz fr selbstadjungierte Operatoren) *Ist $X$ ein separabler Hilbertraum und $T \neq 0$ ein selbstadjungierter Operator auf $X$, so hat $T$ die Gestalt* “SPEKSATZ

$$T(x) = \sum_{k \in N} \lambda_k < x, e_k >_X e_k$$

*mit $N \subset \mathbb{N}$, einem Orthonormal-System $(e_k)_{k \in N}$ von $X$ und $\lambda_k \in \mathbb{R}$ fr alle $k \in N$.*

**Bemerkung 2.5.7** Ist 0 kein Eigenwert von $T$, so ist $T$ invertierbar.

# 3 Variationsformeln und Jacobi-Operator “BAL

## 3.1 Variation des Funktionals

**Definition 3.1.1** Wir betrachten die Vektorbndel

$$\pi: \boldsymbol{E} \longrightarrow M \times \widetilde{M}$$

$$\widetilde{\pi}: \boldsymbol{F} \longrightarrow M \times \widetilde{M}$$

mit den Fasern $\pi^{-1}(p,q) = \boldsymbol{T}_p M$ und $\widetilde{\pi}(p,q) = \boldsymbol{T}_q \widetilde{M}$.

$$\pi \otimes \widetilde{\pi}: \mathrm{Hom}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}) \longrightarrow M \times \widetilde{M}$$

ist dann ein Vektorbndel vom Rang $n^2 + n$ ber $M \times \widetilde{M}$. Im folgenden bezeichnen wir das Bndel $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}) \longrightarrow M \times \widetilde{M}$ mit $\pi: \Theta \longrightarrow M \times \widetilde{M}$.

Ist $f\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ differenzierbar, so ist fr jedes $p \in M$ und $q\colon= f(p) \in \widetilde{M}$

$$d_p f \in\colon \boldsymbol{T}_p M \longrightarrow \boldsymbol{T}_q \widetilde{M}$$

das zugehrige Differential. Durch $\theta_f(p)\colon= d_p f)$ wird dann eine Abbildung

$$\theta\colon M \longrightarrow \Theta$$

definiert. Wir betrachten im folgenden die Lagrangesche

$$\Phi\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$$

und das zugehrige Variationsintegral

$$\mathcal{F}(f)\colon= \int_M \Phi \circ \theta \, d\mathrm{vol} \, .$$

Wir whlen einen endlichen Atlas $\mathcal{A} = \{(x_i, U_i)\colon i \in I\}$ fr $M$, einen endlichen Atlas $\widetilde{\mathcal{A}} = \{(y_j \widetilde{U}_j)\colon j \in I\}$ fr $\widetilde{M}$ mit $x_i\colon U_i \longrightarrow V_i$, $y_j\colon \widetilde{U}_j \longrightarrow \widetilde{V}_j$ und eine Teilung der Eins $\{\psi_i\colon i \in I\}$ mit $\mathrm{supp}\psi_i \subset U_i$. Vermge $dx_i$ und $dy_j$ sind dann $\boldsymbol{T}U_i \cong V_i \times \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{T}\widetilde{U} \cong \widetilde{V} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Die Zuordnung

$$d_p f \longmapsto (p, f(p), \partial f\big|_p)$$

gibt einen Diffeomorphismus

$$\Theta\big|_{U \times \widetilde{U}} \cong V \times \widetilde{V} \times \mathbb{R}^{n^2+n} \, .$$

In lokalen Koordinaten ist

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{i \in I} \int_M \psi_i \Phi(d_p f) \, d\mathrm{vol} = \sum_{i \in I} \int_{V_i} F_i(x, u_i(x), Du_i(x)) dx \, ,$$

dabei ist $u_i\colon= y_j \circ f \circ x_i^{-1}$.

**Definition 3.1.2** Sei $f\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ eine Immersion. Eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$F\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow \widetilde{M}$$

heit **glatte Variation von f**, falls

a) Fr alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist $f_t\colon= F(t, \cdot)\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ eine Immersion,

b) $f_0 = f$

c) Fr alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist $f_t\big|_{\partial M} = f\big|_{\partial M}$

**Definition 3.1.3** Eine Abbildung $\varphi\colon M \longrightarrow \boldsymbol{T}\widetilde{M}$ heit **Vektorfeld lngs** $f$, wenn $\pi_{\widetilde{M}} \circ \varphi = f$ gilt.

**Definition 3.1.4** $F$ heit **glatte Variation von f in Richtung** $\varphi$, falls

$$\varphi = d_p F \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) .$$

**Bemerkung 3.1.5** *Ist $\varphi$ ein $\mathcal{C}_0^\infty$ Vektorfeld lngs $f$, so ist $F(t,p) := \exp_{f(p)}(t\varphi)$ eine glatte Variation von $f$.*

**Definition 3.1.6** Die **erste Variation von $\mathcal{F}$ in Richtung** $\varphi$ ist definiert als

$$\partial\mathcal{F}(f,\varphi) := \frac{d}{dt} I(\exp_f t\varphi)\big|_{t=0}$$

Die **zweite Variation von $\mathcal{F}$ in Richtung** $\varphi$ ist definiert als

$$\partial^2\mathcal{F}(f,\varphi) := \frac{d}{dt} \partial I(\exp_f t\varphi, \varphi)\big|_{t=0}$$

$f$ heit **kritischer Punkt von** $I$, falls fr alle $\mathcal{C}_0^\infty$ Vektorfelder $\varphi$

$$\partial\mathcal{F}(f,\varphi) = 0.$$

$f$ heit **relatives Minimum**, falls es fr alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, T\widetilde{M})$ ein $t_0(\varphi) > 0$ gibt, so da $I(f) \leq I(\exp_f t\varphi)$ fr alle $t \in (-t_0(\varphi), t_0(\varphi))$.
$f$ heit **starkes Minimum zu festen Randwerten von** $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}(f) < \mathcal{F}(g)$ fr alle Immersionen $g$, so da $g(M)$ in einer Tubenumgebung von $f(M)$ liegt und $\partial f(M) = \partial g(M)$.
$f$ heit **homologisches Minimum von** $\mathcal{F}$, falls nur in der Homologieklasse von $f$ minimiert wird.

## 3.2 Der Euler-Operator

**Definition 3.2.1** Fr einen Punkt $w \in \Theta$ mit $\pi(w) = (p,q)$ definieren wir ein Unterbndel $V$ des Tangentialbndels $\boldsymbol{T}\Theta$ durch

$$V_w := \boldsymbol{T}_w \mathrm{Hom}(T_pM, \boldsymbol{T}_q\widetilde{M}) = \pi^{-1}(\pi(w)) .$$

$\boldsymbol{T}\Theta$ lt sich aufspalten in die direkte Bndelsumme

$$\boldsymbol{T}\Theta = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} = \boldsymbol{T}M \oplus \boldsymbol{T}\widetilde{M} \oplus V$$

mit $H := \boldsymbol{T}M \times \widetilde{M} = \boldsymbol{T}M \oplus \boldsymbol{T}\widetilde{M}$. Einen Vektor $W \in \boldsymbol{T}_w\Theta$ mit $\pi(w) = (p,q)$ kann man also eindeutig zerlegen in $W = X + Y + Z$ mit $X \in \boldsymbol{T}M$, $Y \in \boldsymbol{T}\widetilde{M}$ und $Z \in \boldsymbol{T}\mathcal{V}$.

**Definition 3.2.2** Wir fhren auf $\boldsymbol{T}\Theta$ und den oben definierten Unterbndeln lineare Zusammenhnge ein.

$$\nabla^{\Theta} = \nabla^{\mathcal{H}} + \nabla^{\mathcal{V}}$$

dabei ist

$$\nabla^{\mathcal{H}} = \nabla + \widetilde{\nabla}$$

und $\nabla^{\mathcal{V}}$ der euklidische Zusammenhang auf $\boldsymbol{T}\mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}_pM, \boldsymbol{T}_q\widetilde{M})$.
Ist $\Phi\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar so definieren wir

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{H}}(w) &:= \nabla^{\mathcal{H}}\Phi(w)\colon \boldsymbol{T}_{(p,q)}M \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \Phi_Y(w) &:= \widetilde{\nabla}\Phi(w)\colon \boldsymbol{T}_q\widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \Phi_{\mathcal{V}}(w) &:= \nabla^{\mathcal{V}}\Phi(w)\colon \boldsymbol{T}\mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}_pM, \boldsymbol{T}_q\widetilde{M}) \longrightarrow \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

**Satz 3.2.3** (Euler-Gleichungen) *Ein kritischer Punkt $f$ von $\mathcal{F}$ erfllt die Gleichung*

$$\Phi_Y(\theta) - C_{1,2}\nabla^M\Phi_{\mathcal{V}}(\theta_f)) = 0$$

*auf $\boldsymbol{T}\widetilde{M}$.*

**Beweis** Fr ein Vektorfeld $\varphi$ lngs $f$ ist

$$d_p\varphi\colon \boldsymbol{T}_pM \longrightarrow \boldsymbol{T}_{\varphi(p)}\boldsymbol{T}_{f(p)}\widetilde{M} \cong \boldsymbol{T}_{f(p)}\widetilde{M}\ .$$

Damit ist dann

$$\left.\frac{d}{dt}\varphi \circ \theta_{f_t}\right|_{t=0} = \Phi_Y(\theta_f)(\varphi) + \Phi_{\mathcal{V}}(\theta_f)(\varphi)$$

denn

$$\left.\frac{d}{dt}(\mathrm{id}_M, \exp_f t\varphi)\right|_{t=0} = (0, \varphi)\ ,$$

$$\left.\frac{d}{dt}(d_p \exp_f t\varphi)\right|_{t=0} = d_p\varphi$$

und

$$\Phi_H(theta_d f)(0, \varphi) = \Phi_Y(\theta_f)(\varphi)\ .$$

**Definition 3.2.4** Wir definieren den **Euler-Operator zu $\mathcal{F}$** **“EULEROP**

$$L_f\colon \mathcal{C}^2(M, NM) \longrightarrow \mathcal{C}^0(M, TM)$$

durch

$$L_f\varphi := \left[F_y(p, f(p), \partial f\big|_p) - C_{X,V^*}(\nabla_x F_{V^*\otimes W}(p, f(p), \partial f\big|_p))\right]^\sharp .$$

**Bemerkung 3.2.5** Es gilt mit diesen Bezeichnungen

$$\partial\mathcal{F}(f,\varphi) = \int_M g(L(f),\varphi)\, d\mathrm{vol}$$

**Bemerkung 3.2.6** $L_f$ ist ein quasilinearer Differentialoperator der Ordnung 2.

**Beweis**

## 3.3 Zweite Variation und der Jacobi-Operator

**Definition 3.3.1** Der **Jacobi-Operator zu** $\mathcal{F}$ $J_f$ ist die Linearisierung des Euler-Operators $L$ an der Stelle $f$, das heit

$$J_f(\varphi) = \frac{\partial}{\partial t} L(f_t)$$

fr eine Variation $f_t$ von $f$ in Richtung $\varphi$.

**Lemma 3.3.2**

$$\begin{aligned} J_f(\varphi) =& \Big[C_{2,3}(F_{yy}(p, f(p), \partial f\big|_p) \otimes \varphi) \\ &- 2C_{4,5}C_{1,2}(\nabla_X F_{y,V^*\otimes W}(p, f(p), \partial f\big|_p) \otimes \varphi) \\ &- C_{6,7}C_{1,5}C_{2,3}(\nabla_X\nabla_X F_{V^*\otimes W V^*\otimes W}(p, f(p), \partial f\big|_p) \otimes \varphi)\Big]^\sharp . \end{aligned}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} J_f(\varphi)^\flat =& \frac{\partial}{\partial t} L(f_t)\big|_{t=0} \\ =& \frac{\partial}{\partial t}\left[F_y(p, f_t(p), \partial f_t\big|_p) - C_{1,2}(\nabla_X F_{V^*\otimes W}(p, f_t(p), \partial f_t\big|_p))\right] \\ =& C_{2,3}(F_{yy}(p, f(p), \partial f\big|_p) \otimes \varphi) - C_{2,3}(F_{yD} \otimes \partial\varphi) \\ &- C_{4,5}C_{1,2}(\nabla_X F_{V^*\otimes W}(p, f(p), \partial f\big|_p) \otimes \varphi) \\ &- C_{4,5}C_{1,2}(\nabla_X F_{V^*\otimes W D}(p, f(p), \partial f\big|_p) \otimes \partial\varphi) . \end{aligned}$$

Mit partieller Integration folgt nun die Behauptung

**Bemerkung 3.3.3** $J_f$ ist ein linearer Differentialoperator der zweiter Ordnung. Wir betrachten in diesem Paragraphen die quadratische Form

$$Q_f(\varphi) := \partial^2 \mathcal{F}(f, \varphi)$$

**Lemma 3.3.4** *$J_f$ ist der Euler-Operator von $\frac{1}{2} Q_f$*

**Beweis**

$$\begin{aligned}\int_M < L_f(\varphi), \varphi > &= \partial^2 \mathcal{F}(f, \varphi) \\ &= \frac{d}{dt} \partial \mathcal{F}(f_t, \varphi)\Big|_{t=0} \\ &= \int_M \frac{d}{dt} < L(f_t), \varphi > \Big|_{t=0} \\ &= \int_M < \frac{\partial}{\partial t} L(f_t), \varphi > \Big|_{t=0} \int_M < L(f), \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \varphi}_{=0} >\end{aligned}$$

Mit dem Fundamental-Lemma der Variationsrechnung folgt jetzt die Behauptung.

□

**Lemma 3.3.5** Es gibt Konstanten $c_i, c_2 > 0$, so da fr die quadratische Form**"PHIUNGL** $Q_f(\varphi) := \partial^2 I(f, \varphi)$ gilt,

$$Q_f(\varphi) \geq C_0 |\varphi|_{H^{1,2}(M,NM)} - |\varphi|_{L^2(M,NM)}$$

**Beweis** Fr $v \in T_pM$ ist

$$\begin{aligned}& < \widetilde{R}(v, \varphi)v, \varphi > \\ &= < \widetilde{\nabla}_v \widetilde{\nabla}_\varphi v, \varphi > - < \widetilde{\nabla}_\varphi \widetilde{\nabla}_v v > - \underbrace{< \widetilde{\nabla}_{[v,\varphi]} v, \varphi >}_{=0} \\ &= - < \widetilde{\nabla}_\varphi v, \widetilde{\nabla}_v \varphi > + v < \widetilde{\nabla}_\varphi v, \varphi > - \underbrace{< \widetilde{\nabla}_v v, \widetilde{\nabla}_\varphi \varphi >}_{=0} + \varphi < \widetilde{\nabla}_v v, \varphi > \\ &= -|\widetilde{\nabla}_v \varphi|^2 - \underbrace{v\varphi < v, \varphi >}_{=0} - \underbrace{v < v, \widetilde{\nabla}_\varphi \varphi >}_{=0} + \varphi < \mathcal{B}(v, v), \varphi >\end{aligned}$$

Deswegen ist

$$
\begin{aligned}
Q_f(\varphi) &= \int_M < \triangle\varphi, \varphi > + \int_M < \mathcal{K}\varphi, \varphi > - \int_M < B\varphi, \varphi > \\
&= \int_M < \nabla\varphi, \nabla\varphi > + \int_M |\nabla\varphi|^2 + \int_M \varphi < H, \varphi > - \int_M < \mathcal{B}^t\varphi, \mathcal{B}^t\varphi >
\end{aligned}
$$

## 3.4 Eigenschaften des kleinsten Eigenwerts

**Lemma 3.4.1** **“EIGENWERT**

$$\lambda_f := \inf\{Q_f(\varphi) : \varphi \in H^{\circ 1,2}(M, NM), |\varphi|_{L^2(M,NM)} = 1\}$$

ist der kleinste Eigenwert von $L_f$, das heit, es gibt ein $\varphi \in H^{\circ 1,2}(M, NM)$ mit

$$\lambda_f \varphi_f = L_f(\varphi_f).$$

**Beweis** Wir betrachten die Minimalfolge $\varphi_n$ in $H^{\circ 1,2}(M, NM)$ mit $|\varphi_n|_{L^2} = 1$. Wegen 3.3.5 und der Beschrnktheit der Folge $\partial^2 I(f, \varphi_n)$ gilt dann

$$|\varphi|_{H^{\circ 1,2}(M,NM)} \leq C(\partial^2 I(f, \varphi_n) + 1) \leq C$$

$H^{\circ 1,2}(M, NM)$ ist reflexiv, deswegen kann man ohne Einschrnkung annehmen, da $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \in H^{\circ 1,2}(M, NM)$.
Ist $\lambda_f > 0$, so ist $Q_f(\varphi)$ eine positiv definite quadratische Form in $\varphi$ und als solche schwach unterhalbstetig. Damit erreicht man

$$\lambda_f \leq Q_f(\varphi) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} Q_f(\varphi) \leq \lambda_f.$$

Im allgemeinen Fall betrachtet man die quadratische Form

$$\widetilde{Q}(\varphi) := Q(\varphi) + c_1 |\varphi|_{L^2(M,NM)}$$

Sie ist wegen 3.3.5 beschrnkt und nichtnegativ, es gibt also ein
$\widetilde{\varphi} \in H^{\circ 1,2}(M, NM)$ mit $|\varphi|_{L^2(M,NM)} = 1$ und $\widetilde{Q}(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\lambda}_f$.

$$
\begin{aligned}
Q(\widetilde{\varphi}) + c_1 = \widetilde{Q}(\widetilde{\varphi}) &= \inf\{\widetilde{Q}(\varphi) : \varphi \in H^{\circ 1,2}(M, NM), |\varphi|_{L^2(M,NM)} = 1\} \\
&= \inf\{Q(\varphi) : \varphi \in H^{\circ 1,2}(M, NM), |\varphi|_{L^2(M,NM)} = 1\} + c_1 \\
&= \lambda_f + c_1
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 3.4.2** Ist $\lambda_f > 0$, so ist $Q_f(\varphi) > 0$ fr alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(M, TM)$, das heit, $f$ ist ein realtives Minimum des Flcheninhalts.
Ist umgekehrt $f$ ein relatives Minimum, so ist offensichtlich $\lambda_f \geq 0$.
Ist also $\lambda_f < 0$, so ist $f$ kein relatives, und insbesondere kein starkes Minimum.

**Lemma 3.4.3** *Ist $\lambda_f > 0$, so ist $L_f$ invertierbar.* **“LUMKEHR**

**Lemma 3.4.4** *$L_f$ hngt stetig von der Immersion $f$ ab*

**Bemerkung 3.4.5** Sei $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$, $r > 0$ wie in 2.3.1, dann ist fr $u \in B_r(0) \subset \mathcal{C}^{2,\alpha}(M, NM)$ die Abbildung $f_u := \exp_f u : M \longrightarrow \widetilde{M}$ eine $\mathcal{C}^{2,\alpha}$-Immersion. Wir betrachten den Differentialoperator

$$L_u := \mathcal{L}_{f_u}$$

$L_u$ ist offensichtlich linerar und stetig in $u$.

**Lemma 3.4.6** *Ist $\lambda(u)$ der kleinste Eigenwert des Jacobi-Operators $L_u$ von $M_u$,* **“LAMBDASTET** *so ist das Funktional*

$$\lambda : \mathcal{C}^1(M, NM) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \mapsto \lambda(u)$$

*stetig in 0.*

# 4 Variationsformeln fr den Flcheninhalt

**Satz 4.0.1** (Erste Variationsformel) *Sei $\varphi$ ein normales Variationsfeld, dann ist*“**ERSTEVAR**

$$\partial I(f,\varphi) = -\int_M < H, \varphi > dV(f).$$

**Beweis**

$$\partial I(f,\varphi) = \frac{d}{dt} I(\exp_f t\varphi) = \frac{d}{dt}\int_M dV(\exp_f t\varphi)$$

man mu also zeigen, da

$$\frac{d}{dt} dV(\exp_f t\varphi) = - < K, \varphi > dV(f).$$

Wir whlen jetzt einen ON Rahmen $\{v_i\}$ auf einer Umgebung von $p$ mit $\nabla_{v_i} v_i = 0$. Dies kann man zum Beispiel erreichen, indem man eine orthonormale Basis von $\boldsymbol{T}_p M$ parallel entlang der von $p$ ausgehenden geodtischen Strahlen verschiebt. Setzt man nun $f_t := \exp_f t\varphi$, dann erhlten wir fr die induzierte Metrik $g_{ij}(t) := < \partial f_t \cdot v_i, \partial f_t \cdot v_j >$ und $g(t) := \det(g_{ij}(t))$, und danmit

$$\begin{aligned} dV(f_t) &= \sqrt{g(t)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \sqrt{g(t)} dV(f) \\ \frac{d}{dt} dV(f_t) &= \frac{d}{dt}\sqrt{g(t)} dV(f) = \frac{1}{2}\frac{dg}{dt} dV(f) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Spur}\big(g_{ij}(t)\big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} g_{ii}(t) \end{aligned}$$

Setzt man nun $v_i(t) := \partial f_t \cdot v_i$ dann erht man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{ii}\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} < v_i(t), v_i(t) > \Big|_{t=0} \\ &= 2 < \widetilde{\nabla}_\varphi v_i(t), v_i(t) > \Big|_{t=0} \\ &= 2 < \widetilde{\nabla}_{v_i(t)} \varphi, v_i(t) > \Big|_{t=0} + 2 < \underbrace{[\varphi, v_i(t)]}_{=0}, v_i > \\ &= 2 v_i(t) \underbrace{< \varphi, v_i >}_{=0} - 2 < \varphi, \widetilde{\nabla}_{v_i(t)} v_i(t) > \\ &= -2 < (\widetilde{\nabla}_{v_i} v_i)^N, \varphi > - < \underbrace{(\widetilde{\nabla}_{v_i} v_i)^T}_{=0}, \varphi > \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\frac{d}{dt} dV(f_t) = - < H, \varphi >$. □

**Bemerkung 4.0.2** $H$ ist der Euleroperator zu $I$.

**Lemma 4.0.3** *Ein kritischer Punkt $f$ von $I$ erfllt die lineare elliptische Differentialgleichung*

$$H(f) = 0$$

Fr der zweite Variation des Flcheninhalts betrachten wir die folgenden Differentialoperatoren

$$\mathcal{K}(\varphi) := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{R}(v_i, \varphi)v_i$$
$$\triangle^N(\varphi) := \mathrm{Spur}\nabla^N \nabla^N$$

wobei $v_i$ ein lokaler orthonormaler Rahmen von $\boldsymbol{T}M$ sei.

**Lemma 4.0.4** *$\mathcal{K}$ und $\triangle^N$ sind lineare selbstadjungierte Differentialoperatoren zweiter Ordnung.*

**Beweis** Symmetrien
Die zweite Fundamentalform $\mathcal{B}$ ist ein Schnitt in $\boldsymbol{T}^*M \otimes \boldsymbol{T}^*M \otimes \boldsymbol{N}M$, deswegen ist

$$\mathcal{B}_p \in \boldsymbol{T}^*_pM \otimes \boldsymbol{T}^*_pM \otimes \boldsymbol{N}M \cong \mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}^*_pM \otimes \boldsymbol{T}^*_pM, \boldsymbol{N}M).$$

Wir betrachten den Differentialoperator

$$B := \mathcal{B}^t \circ \mathcal{B} ,$$

dabei ist $\mathcal{B}^t$ der zu $\mathcal{B}$ adjungierte Homomorphismus

$$\mathcal{B}^t_p \in \mathrm{Hom}(\boldsymbol{N}_pM, \boldsymbol{T}^*_pM \otimes \boldsymbol{T}^*_pM).$$

**Lemma 4.0.5** *$B$ ist linearer selbstadjungierter Differentialoperator nullter Ordnung.*

**Beweis**

$$\begin{aligned} < B(\nu), \mu > &= < \mathcal{B}^t(\nu), \mathcal{B}^t(\mu) > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} < \mathcal{B}^t(\nu), e_i \otimes e_j >< \mathcal{B}^t(\nu), e_i \otimes e_j > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} < \mathcal{B}(e_i, e_j), \nu >< \mathcal{B}(e_i, e_j), \mu > , \end{aligned}$$

insbesondere ist $B$ selbstadjungiert.

**Satz 4.0.6** (Zweite Variationsformel) *Ist $f\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ eine minimale Immer-* **"ZWEITEVAR** *sion, $\varphi$ ein normales Vektorfeld lngs $f$, so gibt einen linearen selbstadjungierten Differentialoperator der zweiter Ordnung, so da*

$$\partial^2 I(f,\varphi) = \int_M < -\triangle^N \varphi + \mathcal{K}\varphi - B\varphi, \varphi) >.$$

**Beweis** Fr die mittlere Krmmung $H(t)$ der variierten Immersionen $f_t = \exp_f t\varphi$ gilt mit den Bezeichnungen von 4.0.1

$$\begin{aligned} H(t) &= \mathrm{Spur}(\mathcal{B}(t) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(t)\mathcal{B}(v_i(t), v_j(t)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(t)\big(\widetilde{\nabla}_{v_i(t)} v_j(t)\big)^N \end{aligned} .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} < H(t), \varphi > \Big|_{t=0} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0) < \big(\widetilde{\nabla}_{v_i(t)} v_i(t)\big)^N, \varphi > \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0) < \widetilde{\nabla}_{v_i} v_i, \varphi > + \sum_{ij=1}^n g^{ij}(0)\frac{\partial}{\partial t} < \widetilde{\nabla}_{v_i} v_i, \varphi > \ . \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0) < \widetilde{\nabla}_{v_i} v_i, \varphi > + \sum_{i=1}^n < \widetilde{\nabla}_{\varphi}\widetilde{\nabla}_{v_i} v_i, \varphi > \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die beiden Summanden, und verwenden dabei die Formeln

$$\frac{d}{dt}(g^{ij}(t)g_{ij}(t)) = 0$$

$$\widetilde{\nabla}_{\varphi} v_i - \widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi = [v_i, \varphi] = 0$$

$$< \widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi, v_i > + < \varphi, \widetilde{\nabla}_{v_i} v_i >= v_i < v_i, \varphi >= 0 \ .$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \frac{dg^{ij}}{dt}(0) &= -\frac{\partial}{\partial t} < v_i, v_j > \\ &= - < \widetilde{\nabla}_{\varphi} v_i, v_j > - < v_i, \widetilde{\nabla}_{\varphi} v_j > \\ &= < \widetilde{\nabla}_{v_i} v_j, \varphi > + < \widetilde{\nabla}_{v_j} v_i, \varphi > \\ &= 2 < \widetilde{\nabla}_{v_i} v_j, \varphi > + \underbrace{< [v_i, v_j], \varphi >}_{=0} \ . \end{aligned}$$

Fr den linken Summanden berechnen wir

$$
\begin{aligned}
<\widetilde{\nabla}_\varphi \widetilde{\nabla}_{v_i}, \varphi> &= <\widetilde{\nabla}_{v_i} \widetilde{\nabla}_\varphi v_i, \varphi> + <\widetilde{R}(\varphi, v_i)v_i, \varphi> + \underbrace{<\widetilde{\nabla}_{[v_i,\varphi]} v_i, \varphi>}_{=0} \\
&= v_i <\widetilde{\nabla}_\varphi v_i, \varphi> - <\widetilde{\nabla}_\varphi v_i, \widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi> - <\widetilde{R}(v_i,\varphi)v_i, \varphi> \quad .
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$
\begin{aligned}
<\widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi, \widetilde{\nabla}_\varphi v_i> = <\widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi, \widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi> &= \left|\widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi\right|^2 \\
&= \left|(\widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi)^N\right|^2 + \left|(\widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi)^T\right|^2 \\
&= \left|\nabla^N_{v_i}\varphi\right|^2 + \sum_{j=1}^n <\widetilde{\nabla}_{v_i}\varphi, v_j>^2 \\
&= \left|\nabla^N_{v_i}\varphi\right|^2 + \sum_{j=1}^n <\widetilde{\nabla}_{v_i}v_j, \varphi>^2 \\
&= \left|\nabla^N_{v_i}\varphi\right|^2 + \sum_{j=1}^n <(\widetilde{\nabla}_{v_i}v_j)^N, \varphi>^2 \ .
\end{aligned}
$$

Insgesamt ist also, wenn man alle Rechnungen einsetzt

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} <K(t), \varphi>\Big|_{t=0} \\
=& \sum_{i,j=1}^n <\mathcal{B}(v_i,v_j), \varphi><\varphi, \mathcal{B}(v_i,v_j)> \\
&+ \quad \sum_{i=1}^n \left|\nabla^N_{v_i}\varphi\right|^2 \quad - \quad \sum_{i=1}^n <\widetilde{R}(v_i,\varphi)v_i, \varphi> .
\end{aligned}
$$

Aus $\int_M \left|\nabla^N\varphi\right|^2 = -\int_M <\triangle^N\varphi, \varphi>$ folgt nun die Behauptung. $\square$

## 4.1 Der Jacobi-Operator

**Lemma 4.1.1**

$$L_f := -\triangle^N + \mathcal{K} - B$$

*ist ein stetiger linearer selbstadjungierter Differentialoperator zweiter Ordnung und es gilt*

$$L_f(\varphi) = \frac{d}{dt} H(\exp_f t\varphi)\Big|_{t=0}.$$

**Beweis**

$$
\begin{aligned}
\int_M < L_f(\varphi), \varphi > =& \partial^2 I(f, \varphi) \\
=& \frac{d}{dt} \partial I(\exp_f t\varphi, \varphi)\Big|_{t=0} \\
=& -\int_M \frac{d}{dt} < H(\exp_f t\varphi), \varphi >\Big|_{t=0} \\
=& -\int_M < \widetilde{\nabla}_{F_* \frac{\partial}{\partial t}} H(\exp_f t\varphi), \varphi >\Big|_{t=0} \\
& -\int_M < H(\exp_f t\varphi), \widetilde{\nabla}_{F_* \frac{\partial}{\partial t}} \varphi > \Big|_{t=0} \\
=& -\int_M < \frac{d}{dt} H(\exp_f t\varphi)\big|_{t=0}, \varphi > .
\end{aligned}
$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt jetzt die Behauptung.

□

# 5 Kalibrierungen, Felder und starke Minimalitt

## 5.1 Felder

**Definition 5.1.1** Sei $\widetilde{M}$ eine $n+1$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $S \subset \mathbb{R}$ **“BLAETTERDI**
eine Teilmenge. $\{f_s : s \in S\}$ erflle die folgenden Bedingungen:

1. Fr alle $s \in S$ sind die $f_s : M \longrightarrow \widetilde{M}$ $n$-dimensionale immersierte Hyperflchen in $\widetilde{M}$.
2. $\widetilde{M} = \bigcup_{s \in S} f_s(M)$.
3. Fr alle $s \neq t$ ist $f_s(M) \cap f_t(M) = \emptyset$.
4. Fr alle $p \in \widetilde{M}$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset \widetilde{M}$ von $p$, eine offene Menge $U \times (a,b) \subset \mathbb{R}^n \times S$ und einen $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $f : U \times (a,b) \longrightarrow V$ so, da $f(U \times \{s\}) = V \cap M_s$ fr $s \in (a,b)$.

$\{f_s : s \in S \subset \mathbb{R}\}$ heit dann **$\mathcal{C}^k$-Bltterung von $\widetilde{M}$ in $n$-dimensionale Hyperflchen**.

**Definition 5.1.2** Sei $\widetilde{M}$ eine $n+1$-dimensionale Mannigfaltigkeit, $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ **“FELD**
eine $n$-dimensionale kompakte orientierte immersierte Extremale zu einem Funktional $\mathcal{F}$ in $\widetilde{M}$ und $\Phi = \{f_s : s \in S\}$ eine $\mathcal{C}^k$-Bltterung von $\widetilde{M}$ in $n$-dimensionale orientierbare Extremale von $\mathcal{F}$.
$\Phi$ heit **$\mathcal{C}^k$-Feld zu $f$ in** $\widetilde{M}$, falls es eine offene Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ gibt, so da $f\big|_N = f_0 \in \Phi$.
Man kann auf jedem $f_s(M)$ ein orientierendes Einheitsnormalenfeld $\nu_s$ so whlen, da $\nu$, definiert durch $\nu_p := \nu_s(p)$ fr $p \in f_s(M)$, auf ganz $\widetilde{M}$ stetig ist und fr jede positiv orientierte Orthonormalbasis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von $\boldsymbol{T}_p f_s(M)$ die Orthonormalbasis $\{\nu_p, x_1, \ldots, x_n\}$ von $\boldsymbol{T}_p \widetilde{M}$ positiv orientiert ist. $\nu$ heit dann das **Einheitsnormalenfeld an** $\Phi$.

## 5.2 Felder von Minimalflchen

**Definition 5.2.1** Sei $\widetilde{M}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $M$ eine $n$-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit. Eine geschlossene $n$-Form $\varphi$ auf $\widetilde{M}$ heit eine **Kalibrierung von** $M$ **in** $\widetilde{M}$ wenn fr alle $p \in \widetilde{M}$ und fr alle orthonormalen $v_1, \ldots, v_n \in \boldsymbol{T}_p\widetilde{M}$ gilt:

$$\varphi_p(v_1, \ldots, v_n) \leq 1$$

und

$$\varphi_p(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

falls $(x_1, \ldots, x_n)$ positiv orientiert.

**Satz 5.2.2** (Fundamentalsatz fr Kalibrierungen) *Sei $\widetilde{M}$ eine vollstndige* "**KALIFUN** *Riemannsche Mannigfaltigkeit, $M$ eine kompakte, orientierbare, $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\widetilde{M}$ und $\varphi$ ein Kalibrierung von $M$ in $\widetilde{M}$. Dann ist $M$ homologisch minimierend in $\widetilde{M}$ zu eigenen Randwerten, das heit, fr alle zu $M$ homologen Untermannigfaltigkeiten $N$ mit $\partial M = \partial N$ gilt $\mathcal{H}^n(N) \geq \mathcal{H}^n(M)$.*

**Beweis** (Federers Differentialformenargument)

$$\mathcal{H}^n(N) = \int_N 1\, d\mathcal{H}^n \geq \int_N \varphi = \int_M \varphi = \int_M 1\, d\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n(M)$$

□

**Bemerkung 5.2.3** Hat $\widetilde{M}$ triviale $n$-te Homologie, so ist $M$ minimierend zu eigenem Rand.

**Bemerkung 5.2.4** Ist fr alle Untermannigfaltigkeiten $N \subset \widetilde{M}$ die orientierte "**RANDMIN** Vereinigung $N \cup (-M)$ Rand eines Kompaktums, so ist $M$ ein Minimum in $\widetilde{M}$ zu eigenen Randwerten.

**Satz 5.2.5** (Solomon) *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Dann ist das Einheitsnormalenfeld* "**SOLOMON** *$\nu$ an eine $\mathcal{C}^0$-Bltterung von $U$ in minimale Hyperflchen sogar Lipschitz-stetig.*

**Korollar 5.2.6** *Ist $\Phi$ ein Feld zu $M$ in $\widetilde{M}$, so ist das Einheitsnormalenfeld an* "**FELDDIFF** *$\Phi$ fast berall differenzierbar.*

**Beweis** mit dem Satz von Rademacher 2.5.1. □

**Satz 5.2.7** *Ist $M$ eine kompakte, orientierbare Minimalfche mit Rand $\partial M \neq \emptyset$, und ist $\Phi$ ein $\mathcal{C}^0$-Feld zu $M$ in $\widetilde{M}$, so da $\widetilde{M}$ eine Tubenumgebung von $M$ enthlt, so ist $M$ ein starkes homologisches Minimum des Flcheninhalts.* **“MINIFELD**

**Beweis** Wir konstruieren eine Kalibrierung von $M$ in $\widetilde{M}$.
Sei $\nu$ das Einheitsnormalenfeld an $\Phi$ und seien in einer Umgebung von $p \in \widetilde{M}$ die orthonormalen Vektorfelder $\{e_0, \ldots, e_n\}$ gegeben. Es gibt dann Koeffizientenfunktionen $\alpha_i$, so da $\nu = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i$ auf $V$. Mit

$$\omega := de_0 \wedge \ldots \wedge de_n$$

ist dann fr jede positiv orientierte Orthonormalbasis $\{v_0, \ldots, v_n\}$ von $\boldsymbol{T}_p S$ ist

$$\omega(v_0, \ldots, v_n) = 1.$$

Definiere nun auf $\widetilde{M}$ die $n$-Form $\omega_\nu$ durch

$$\begin{aligned}
\omega_\nu(w_1, \ldots, w_n) :=& \omega(\nu, w_1, \ldots, w_n) \\
=& \sum_{i=0}^n \alpha_i \omega(e_i, w_1, \ldots, w_n) \\
=& \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i de_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{de_i} \wedge \ldots \wedge de_n(w_1, \ldots, w_n)\ .
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\omega_\nu &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i de_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{de_i} \wedge \ldots \wedge de_n \\
d\omega_\nu &= \sum_{i=0}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} de_0 \wedge \ldots \wedge de_n \\
&= \operatorname{div}(\nu)\omega\ .
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, da $\omega_\nu$ geschlossen ist, zeigen wir da $\operatorname{div}(\nu) = 0$. In einer Umgebung um $q = f_s(p)$ kann man ohne Einschrnkung annehmen, da $f_s$ ein Graph in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, das heit, $f_s(x) = (x, F(x))$. Dann ist die Normale in $x$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla F|^2}} (\nabla F, -1)\ .$$

Die Minimalfchengleichung fr die minimale Immersion $f_s$ hat dann die Form

$$\operatorname{div}_n \left( \frac{\nabla F}{\sqrt{1 + |\nabla F|^2}} \right) = 0\ .$$

Wir haben also

$$\operatorname{div}_{n+1}(\nu) = \operatorname{div}_n\left(\frac{\nabla F}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}}\right) = 0\ ,$$

denn der rechte Term hngt nicht von $x_{n+1}$ ab.
Fr eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\{x_1,\ldots,x_n\}$ von $\boldsymbol{T}M$ ist

$$\omega_\nu(x_1,\ldots,x_n) = 1,$$

denn $\{\nu, x_1,\ldots,x_n\}$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\boldsymbol{T}_p\widetilde{M}$.
Fr alle orthonormalen $\{v_1,\ldots,v_n\}$ gibt es genau ein $v_0$, so da $\{v_0,\ldots,v_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis bildet. Dann ist $\omega(v_0,\ldots,v_n) = 1$.
$\nu$ lt sich berall so aufspalten, da $\nu = v + \sigma v_1$ wobei $v \in \operatorname{span}(v_0,\ldots,v_n)$ und $\sigma \leq 1$.
Also gilt

$$\begin{aligned}\omega_\nu(v_1,\ldots,v_n) &= \omega(\nu, v_1,\ldots,v_n)\\ &= \omega(v, v_1,\ldots,v_n) + \omega(\sigma v_0, v_1,\ldots,v_n) = \sigma \leq 1\ .\end{aligned}$$

$\omega_\nu$ kalibriert also $M$ in $\widetilde{M}$. Die Behauptung folgt jetzt aus dem Fundamentalsatz fr Kalibrierungen. □

**Bemerkung 5.2.8** Wenn sich eine Minimalfche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Graph schreiben lt, ist sie ein starkes Minimum des Flcheninhalts zu eigenen Randwerten. **“MINIBEM**

**Beweis** Sei $M_0 = \{(x, f(x))\}$. Dann erfllt $\Phi := \{M_s : s \in \mathbb{R}\}$ mit $M_s = \{(x, f(x) + s)\}$ die Voraussetzungen von Satz 5.2.7. □

## 5.3 Felder von Extremalen

Sei im Folgenden $\Phi = \{f_s : M \longrightarrow \widetilde{M}\}$ ein Feld zu $f_0$.

**Definition 5.3.1** Wir definieren das Differential von $\Phi$ an der Stelle $q \in \widetilde{M}$ durch

$$P(q) := \partial f_s\big|_p \qquad \text{falls } f_s(p) = q.$$

**Definition 5.3.2** Wir definieren ein neues Funktional

$$F^*(p, g(p), A\big|_p) := F_{q_{i,\alpha}}(p, g(p), P(g(p))) \cdot (A_{i,\alpha}\big|_p - P(g(p))) + F(p, g(p), P(g(p)))$$

und

$$\mathcal{F}^*(g) := \int_M F^*(p, g(p), \partial g\big|_p) dvol$$

**Lemma 5.3.3** $\partial\mathcal{F}^*(g,\varphi) = 0$ *fr alle* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(M, \boldsymbol{N}M)$.

**Beweis** Offensichtlich gilt $F^*_{p_i^\alpha} = F_{p_i^\alpha}$. Die Bltter $f_s \in \Phi$ sind Extremale zu $F$, sie sind schwache Lsungen der Eulergleichungen von $\mathcal{F}$, das heit

$$\begin{aligned}
0 =& F_{y^\alpha}(p, f_s(p), \partial f_s\big|_p) - \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i^\alpha}(p, f(p), \partial f_s\big|_p) \\
=& F_{y^\alpha}(p, f_s(p), P(f(p))) - \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i^\alpha}(p, f(p), P(f(p))) \\
=& F_{y^\alpha}(p, f_s(p), P(f(p))) - F_{p_i^\alpha x_i}(p, f(p), P(f(p))) \\
& - F_{p_i^\alpha y_\beta}(p, f(p), P(f(p))) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \\
& - F_{p_i^\alpha p_j^\beta}(p, f(p), P(f(p))) \cdot (P^\beta_{x_i} - P^j_{y_\alpha} P^i) \ .
\end{aligned}$$

**Lemma 5.3.4** $\mathcal{F}^*(f) = \mathcal{F}^*(g)$ fr alle Immersionen $f$ und $g$ mit $\partial f(M) = \partial g(M)$**"INVARIANT** und $f(M), g(M) \subset \vee$.

**Bemerkung 5.3.5** Wegen der Eigenschaft 5.3.4 heit $\mathcal{F}^*$ **Hilbert invariantes Integral**.

**Definition 5.3.6** Wir definieren die **Weierstra-Funktion** zu $F$

$$\mathcal{E} : M \times \widetilde{M} \times \mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}M, \boldsymbol{T}\widetilde{M}) \times \mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}M, \boldsymbol{T}\widetilde{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\mathcal{E}(p, z, A, B) := F(x, z, B) - F(p, z, A) - (B - A)F_P(p, z, A).$$

**Satz 5.3.7** *$f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ sei kompakte orientierte immersierte Extremale zu $\mathcal{F}$*"**EXTREFELD** *und $\Phi$ ein $\mathcal{C}^2$-Feld zu $M$ in $\widetilde{M}$, so da $\widetilde{M}$ eine Tubenumgebung $\mathcal{T}_\varepsilon(f)$ von $M$ enthlt. Ist dann weiterhin $\mathcal{E}(p, z, A, B) > 0$ fr alle $p \in M$, $z \in \mathcal{T}_\varepsilon(f)$ und $A \neq B \in$ $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}M, \boldsymbol{T}\widetilde{M})$, so ist $f$ starkes homologisches Minimum von $\mathcal{F}$ zu eigenen Randwerten.*

**Beweis** Wir betrachten eine andere Immersion $g : M \longrightarrow \widetilde{M}$ mit $\partial f(M) = \partial g(M)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g) - \mathcal{F}(f) =& \mathcal{F}(g) - \mathcal{F}^*(f) = \mathcal{F}(g) - \mathcal{F}^*(g) \\
& \int_M F(p, g(p), \partial g\big|_p) - F(p, g(p), \partial f\big|_{f^{-1}(g(p))}) \\
& \quad - F_p(p, g(p), \partial f\big|_{f^{-1}(g(p))}) \cdot (\partial g\big|_p - \partial f\big|_{f^{-1}(g(p))}) dvol \\
=& \int_M \underbrace{\mathcal{E}(p, g(p), \partial f\big|_{f^{-1}(g(p))}, \partial g\big|_p)}_{\geq 0} .
\end{aligned}$$

Damit ist dann $\mathcal{F}(g) \geq \mathcal{F}(f)$. $\square$

## 5.4 Striktes Minimum

**Definition 5.4.1** Eine **($m$-dimensionale Distribution $\theta$ auf** $M$ ist ein Unterbndel $\theta$ von Rang $m$ des Tangentialraumes $\boldsymbol{T}M$. Fr jedes $p \in M$ ist also $\theta_p \subset \boldsymbol{T}_p M$ ein $p$-dimensionaler Teilraum.
Ist das Unterbndel $\theta \subset \boldsymbol{T}M$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$, so heit $\theta$ eine $\mathcal{C}^k$-Distribution.

**Definition 5.4.2** Eine $p$-dimensionale immersierte Untermannigfaltigkeit $f\colon N \longrightarrow M$ heit **Integral-Untermannigfaltigkeit zu** $\theta$, falls fr alle $p \in N$ gilt $\theta(f(p)) = df(\boldsymbol{T}_p N)$.
$\theta$ heit **integrabel in** $p \in M$, falls es eine Integraluntermannigfaltigkeit $N \subset M$ zu $\theta$ mit $p \in N$.

**Lemma 5.4.3** *Ist $\theta$ eine $p$-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Distribution und $f\colon N \longrightarrow M, \widetilde{f}\colon \widetilde{N} \longrightarrow M$ Integral-Untermannigfaltigkeiten von $\theta$ mit $f(p) \in f(N) \cap \widetilde{f}(\widetilde{N})$, so gibt es offene Untermannigfaltigkeiten $U$ von $N$ respektive $\widetilde{U}$ von $\widetilde{N}$, so da $f(U) = \widetilde{f}(\widetilde{U})$*

**Beweis** Siehe [CH] p. 91.

**Bemerkung 5.4.4** Sind $f\colon N \longrightarrow M$ und $\widetilde{f}\colon \widetilde{\longrightarrow} M$ Integral-Untermannigfaltigkeiten von $\theta$ mit $\partial f(N) \cap \partial \widetilde{f}(\widetilde{N}) \neq \emptyset$, so ist $f(N) = \widetilde{f}(\widetilde{N})$.

**Beweis** $f(N) \cap \widetilde{f}(\widetilde{N})$ ist offensichtlich abgeschlossen und nach Voraussetzung nichtleer. Aufgrund des obigen Lemmas ist $f(N) \cap \widetilde{f}(\widetilde{N})$ auch offen in $f(N)$. Es ist also $f(N) \cap \widetilde{f}(\widetilde{N}) = f(N)$, das heit $\widetilde{f}(\widetilde{N}) \subset f(N)$.
Die Inklusion in der anderen Richtung zeigt man analog. $\square$

**Korollar 5.4.5** *Mit den Voraussetzungen von 5.2.7 ist $M$ ein striktes starkes*“**MINISTRIKT** *Minimum.*

**Beweis** Wir betrachten die zu der Normalen $\nu$ an $F$ duale Distribution $\theta$ aller Tangentialrume an $\Phi$. Offensichtlich ist $M$ eine Integraluntermannigfaltigkeit zu $\theta$. Fr $N \neq M$ mit $\partial N = \partial M \neq \emptyset$ mu sich das Normalenfeld $\nu_N$ an $N$ auf einer Teilmenge $\widehat{N} \subset N$ von $\nu\big|_N$ mit $\mathcal{H}^n(\widehat{N}) > 0$ unterscheiden, weil $\nu_N$ stetig ist und sonst $N$ mit $M$ identisch wren. Dort hat die Projektion von $\nu_N$ auf $\nu\big|_N$ eine Lnge ¡1, und deswegen gilt $\omega_\nu\big|_{\widehat{N}} < 1$. In 5.2.2 gilt also die strikte Ungleichung. $\square$

**Korollar 5.4.6** *Mit den Voraussetzungen von 5.3.7 ist $M$ ein striktes starkes*“**EXTRESTRIK** *Minimum.*

**Beweis** Wir betrachten hier die Distribution $\theta$ der Tangentialrume an $\Phi$, sie ist gegeben durch

$$\theta(q) := \operatorname{Im}(\partial f\big|_{f^{-1}(q)}) \subset \boldsymbol{T}\widetilde{M}.$$

Nun ist $\partial f(M) = \partial g(M)$ aber $g \neq f$, deswegen kann $g(M)$ keine Integraluntermannigfaltigkeit von $\theta$ sein. Es gibt also einen Punkt $p_0 \in M$ so, da

$$\partial f\big|_{f^{-1}(g(p))} \neq \partial g\big|_p.$$

$\mathcal{E}(p, g(p), \partial f\big|_{f^{-1}(g(p))}, \partial g\big|_p)$ ist also auf einer ganzen Umgebung von $p_0$ grer als 0.
$\square$

# 6 Feldkonstruktion

In diesem Kapitel soll ein Feld von Minimalflchen um eine gegebene kompakte stabile Minimalfiche $\mathcal{M}$ konstruiert werden. Dazu wird eine Schar von Parallelflchen $M_s$ um $M$ zu einer Schar von Minimalflchen verbogen. Dann wird gezeigt, da die einzelnen Bltter der Schar sich nicht schneiden und eine Tubenumgebung von $M$ berdecken.
Dazu mu man zuerst das Vektorfeld der mittleren Krmmung an die induzierten Mannigfaltigkeiten betrachten.

## 6.1 Die Operatoren $H_s$, $L_s$ und $E_s$

Wir betrachten den Operator $H$, der einem Schnitt im Normalenbndel von $M$ das Vektorfeld der mittleren Krmmung an die induzierte Mannigfaltigkeit zuordnet. Ein Schnitt $u$ mit $H(u) = 0$ induziert also eine Minimalfiche. Nach 2.4.9 ist $H$ gerade der Laplace-Beltrami-Operator.
Nun ist der mittlere Krmmungsvektor ein Normalenvektor an die induzierte Mannigfaltigkeit und deswegen im allgemeinen nicht normal an $M$. Wir betrachten also die Projektion $H^\perp$ von $H$ auf das Normalenbndel von $M$. Ist $\pi_{\boldsymbol{N}M}\colon T\widetilde{M} \longrightarrow \boldsymbol{N}M$ die Projektion auf das Normalenbndel von $M$, so ist der Operator

$$H^\perp = \pi_{\boldsymbol{N}M} \circ H\colon \mathcal{C}^{2,\alpha}(M, \boldsymbol{N}M) \longrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(M, \boldsymbol{N}M)$$

linearer Differentialoperator.

**Lemma 6.1.1** *Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so da fr alle $u \in \mathcal{C}^1(M, \boldsymbol{N}M)$ mit $|u|_{\mathcal{C}^1(M,\boldsymbol{N}M)}$ <***“NORMPRO** *$\varepsilon_0$, und fr alle Vektorfelder $V \in L^1(M_u, T\widetilde{M})$ gilt:*

$$\pi_{\boldsymbol{N}M}(V) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad V = 0$$

**Beweis** Andernfalls wre in einem Punkt $p \in M$ $V_u(p) \perp \nu_p$ und damit $|u|_{C^1(M,\boldsymbol{N}M)} = \infty$. □

Es reicht also zu zeigen, da $H^\perp(u) = 0$.
In lokalen Koordinaten gilt dann wegen 2.4.8,

$$H(u) = \frac{1}{\sqrt{g(u)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \big(\sqrt{g(u)} g^{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi + u)\big)$$

mit $g_{ij}(u) = (\psi + u)_{x_i}(\psi + u)_{x_j}$, $\big(g^{ij}(u)\big) = \big(g_{ij}(u)\big)$, $g(u) = \det\big(g_{ij}(u)\big)$.
Wir wollen nun kleine Strungen der Schar der Parallelflchen von $M$ betrachten. Die Parallelflchen $M_s$ von $M$ werden von den Schnitten $s\nu \in \mathcal{C}^\infty(M, \boldsymbol{N}M)$ induziert und haben das gleiche Normalenbndel wie $M$. $H_s(u) := H^\perp(s\nu + u)$ ordnet einem Schnitt $u$ in $\boldsymbol{N}M$ das mittlere Krmmungsvektorfeld der durch $u$ ber $M_s$ induzierten Flche zu.
Es gilt nach dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} H_s(u) =& H^\perp(s\nu + u) \\ =& H_s(0) + \frac{dH_s}{dt}(tu)\Big|_{t=0} + \int_0^1 (1-\tau)\frac{d^2 H_s}{dt^2}(tu)\Big|_{t=\tau} d\tau \\ =& H_s + L_s(u) + E_s(u) \end{aligned}$$

$L_s$ ist der Jacobi-Operator von der Parallelflche $M_s$ und als solcher selbstadjungierter, stetiger linearer Differentialoperator.
Im folgenden sei $\lambda_s$ der kleinste Eigenwert von $L_s$. Er hngt nach 3.4.6 stetig von der Immersion und damit stetig von $s$ ab. Wir knnen daher ohne Einschrnkung annehmen, da $\lambda_s > \lambda_0/2$ fr alle $s < \rho$. Wegen 2.5.6 ist $L_s$ fr alle $s \in [-\rho, \rho]$ invertierbar.
Jetzt knnen wir das Problem

$$H_s(u) = H_s + L_s u + E_s u = 0$$

umformulieren in das Fixpunktproblem

$$T_s u := -L_s^{-1}(H_s) - L_s^{-1} E_s u = u\ .$$

**Bemerkung 6.1.2**

$$T_s : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{2,\alpha}(M, \boldsymbol{N}M)$$

ist fr alle $s \in [-\rho, \rho]$ ein stetiger linerarer Operator.
Dieses Fixpunktproblem wird im folgenden mit dem Banachschen Fixpunktsatz gelst.

## 6.2 Formeln fr diese Operatoren

$$
\begin{aligned}
H^{\perp}(s\nu+tu) =& \frac{1}{\sqrt{g(s\nu+tu)}}\big(\sqrt{g(s\nu+tu)}\big)_{x_j} g^{ij}(s\nu+tu)(\psi+s\nu+tu)_{x_j}\\
&+\big(g^{ij}(s\nu+tu)\big)_{x_i}(\psi+s\nu+tu)_{x_j}\\
&+g^{ij}(s\nu+tu)(\psi+tu)_{x_ix_j}\\
=&\frac{1}{2g(s\nu+tu)}g_{x_i}(s\nu+tu)g^{ij}(s\nu+tu)(\psi+s\nu)_{x_j}\\
&+\frac{t}{2g(s\nu+tu)}g_{x_i}(s\nu+tu)g^{ij}(s\nu+tu)u_{x_j}\\
&+g^{ij}(s\nu+tu)(\psi+s\nu)_{x_j}+tg^{ij}_{x_i}(s\nu+tu)u_{x_j}\\
&+g^{ij}(s\nu+tu)(\psi+s\nu)_{x_ix_j}+tg^{ij}(s\nu+tu)u_{x_ix_j}
\end{aligned}
$$

Weil aber $(\psi+s\nu)_{x_i}$ fr alle $i$ tangential zu $M$ ist, gilt

$$
\begin{aligned}
H_s(tu) =& \frac{t}{2g(s\nu+tu)}g_{x_i}(s\nu+tu)g^{ij}(s\nu+tu)u^{\perp}_{x_j} && (H_1)\\
&+tg^{ij}_{x_i}(s\nu+tu)u^{\perp}_{x_j} && (H_2)\\
&+g^{ij}(s\nu+tu)(\psi+s\nu)^{\perp}_{x_ix_j} && (H_3)\\
&+tg^{ij}(s\nu+tu)u^{\perp}_{x_ix_j}\ . && (H_4)
\end{aligned}
$$

**Lemma 6.2.1** *$H_s$ ist in $s$ stetig differenzierbar.*

**Beweis** $g_{ij}(s\nu)=\psi_{x_i}\psi_{x_j}+s(\psi_{x_i}\nu_{x_j}+\nu_{x_i}\psi_{x_j})+s^2\nu_{x_i}\nu_{x_j}$ ist ein Polynom in $s$, $g^{kl}$ ist eine rationale Funktion in $g^{ij}$, damit ein rationale Funktion in $s$ und als solche von der Klasse $\mathcal{C}^1$. $H_s=H^{\perp}(s\nu)=g^{ij}(s\nu)\big(\psi+s\nu\big)_{x_ix_j}$ ist also von der Klasse $\mathcal{C}^1$ in $s$. □

**Satz 6.2.2** *Fr die Mittlere Krmmung $H_s$ der Parallelflchen gilt* **“HCNULL**

$$|H_s|_{C^0}\le Ks.$$

**Beweis** $H_s(x)=H_0(x)+s\frac{dH(x)}{ds}\Big|_{s=\xi(x)}$ fr ein $0\le\xi(x)\le s$.
Fr $K:=\sup_{x\in\mathcal{M}}\big(\frac{dH(x)}{ds}\Big|_{s=\xi(x)}\big)$ ergibt sich die Behauptung. □

**Lemma 6.2.3** ($L^p$ Abschtzungen) *Sei $\lambda_s > 0$, dann gilt:* “LPABSCH

$$|u|_{L^p} \leq 1/\lambda_s |L_s u|_{L^p}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} |u|_{L^p}^p &= \int |u|^{p/2}|u|^{p/2} \\ &\leq \lambda_s^{-p/2} \int |u|^{p/2}|Lu|^{p/2} \\ &\leq \lambda_s^{-p/2} \big||u|^{p/2}\big|_{L^2} \big||L_s u|^{p/2}\big|_{L^2} \\ &= \lambda_s^{-p/2} |u|_{L^p}^{p/2} |L_s u|_{L^p}^{p/2} \; . \end{aligned}$$

Aus $|u|_{L^p}^{p/2} \leq \lambda_s^{-p/2} |L_s u|_{L^p}^{p/2}$ folgt dann die Behauptung. □

## 6.3 Konstruktion der Fixpunkte

Zur Lsung des Fixpunktproblems fr $T_s$ betrachte die folgenden Mengen.

$$\mathcal{K}(s,\sigma) := \left\{ u \in \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\mathcal{M}, \boldsymbol{N}\mathcal{M}) \colon |u|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} \leq s^{1-\sigma}, |u|_{H^{2,p}} \leq s^{1-\sigma} \right\} .$$

**Bemerkung 6.3.1** Fr alle $s, \sigma$ ist $\mathcal{K}(s,\sigma)$ abgeschlossen in $\mathcal{C}_0^{2,\alpha}(M, \boldsymbol{N}M)$.

**Satz 6.3.2** *Es gibt $\sigma > 0$ und $s_3 > 0$ so, da fr alle $s < s_3$ gilt* “ENTHALTEN

$$T_s\big(\mathcal{K}(s,\sigma)\big) \subset \mathcal{K}(s,\sigma) \; .$$

**Beweis** Sei $U \in \mathcal{K}(s,\sigma)$. Zerlege $T_s U = V + W$ so, da V und W den linearen Gleichungen

$$L_s V = -H_s$$

$$L_s W = -E_s(U)$$

gehorchen. Es gengt dann zu zeigen, da V und W den folgenden Abschtzungen gengen:

$(V1)$ $\qquad |V|_{C^{2,\alpha}} \leq K_1 s$

$(V2)$ $\qquad |V|_{H^{2,p}} \leq K_2 s$

$(W1)$ $\qquad |W|_{C^{2,\alpha}} \leq K_3 s$

$(W2)$ $\qquad |W|_{H^{2,p}} \leq K_4 s$

Setze $K := K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ und $s_3 = K^{-1/\sigma}$. Fr alle $s < s_3$ gilt dann $sK < s^{1-\sigma}$ und $V + W = T_s U \in \mathcal{K}(s, \sigma)$

**Bemerkung 6.3.3** Es gilt also

$$|u|_{\mathcal{C}^1(M,\boldsymbol{N}M)} \leq |u|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(M,\boldsymbol{N}M)} \leq Ks,$$

deswegen kann man ohne Einschrnkung annehmen, da

$$\mathcal{K}(s, \sigma) \subset \mathcal{C}.$$

$T_s$ ist also auf $\mathcal{K}(s, \sigma)$ definiert.

## Abschtzungen fr V

Wegen 6.2.3 und 6.2.2 ist $|V|_{L^p} \leq C_1 |H_s|_{L^p} \leq C_2 s$, und wegen 2.5.4 ist

$$\begin{aligned} |V|_{H^{2,p}} &\leq C_3(|L_s V|_{L^p} + |V|_{L^p}) \\ &= C_3(|H_s|_{L^p} + |V|_{L^p}) \\ &\leq C_4 s (V2) \end{aligned}$$

Whle $p = 2n$, dann ist $2 - n/p = 3/2 > 1$ und man hat man nach dem Sobolevschen Einbettungssatz 2.5.2 $|V|_{\mathcal{C}^1} \leq C_5 s$ und damit $|V|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \leq C_5 s$. $H_s$ ist beschrnkt in $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathcal{M}, \boldsymbol{N}\mathcal{M})$ und deswegen gilt nach Lemma 2.5.3

$$\begin{aligned} |V|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} &\leq C_6(|H_s|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} + |V|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}) \\ &\leq C_7 s (V1) \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.3.4** Offensichtlich sind diese Abschtzungen fr $V$ nur von $H_s$ **“VUNABH** abhngig, insbesondere sind sie unabhngig von $U$.

## Abschtzungen fr W

**Satz 6.3.5** *Sei $|u|_{\mathcal{C}^1} \leq r \leq 1$ und $|u|_{\mathcal{C}^2} \leq r \leq 1$ dann gilt* **“EABSCH**

$$|E_s(u)| \leq K\big(|\nabla u|^2 + |\nabla u||\nabla^2 u|\big)$$

$$|E_s(u) - E_s(v)|_{L^p} \leq Kr(|\nabla(u - v)|_{L^p} + |\nabla^2(u - v)|_{L^p})$$

**Beweis** Siehe Kapitel 5

Damit ergibt sich fr $W$

$$
\begin{aligned}
|W|_{L^p} &\leq C_1|E_s(U)|_{L^p} = C_1(\int |E_s(U)|^p)^{1/p} \\
&\leq C_1\Big\{(\int |\nabla u|^{2p} \int |\nabla U|^p|\nabla^2 U|^p)^{1/p}\Big\} \\
&\leq C_1\big\{|\nabla U|_{\mathcal{C}^0}|\nabla U|_{L^p} + |\nabla U|_{\mathcal{C}^0}|\nabla^2 U|_{L^p}\big\} \\
&\leq C_1\big\{|U|_{\mathcal{C}^1}|U|_{H^{1,p}} + |U|_{\mathcal{C}^1}|U|_{H^{2,p}}\big\} \\
&\leq C_1\big\{s^{2-2\sigma} + s^{2-2\sigma}\big\} \\
&\leq C_1 s^{2-2\sigma} \leq C_1 s\ .
\end{aligned}
$$

Damit beweist man $(W1)$ und $(W2)$ wie oben.

**Satz 6.3.6** *Es gibt ein $s_4 > 0$ ,so da fr alle $s < s_4$ gilt, $T_s$ ist auf $\mathcal{K}(s,\sigma)$ kontrahierend in der $H^{2,p}$-Norm.* **“KONTRAK**

**Beweis** Seien $u, v \in \mathcal{K}(s,\sigma)$, dann ist fr $s_4 < 1$ auch $|u|_{\mathcal{C}^2} \leq |u|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} \leq s^{1-\sigma} < 1$ und $|v|_{\mathcal{C}^2} \leq s^{1-\sigma} < 1$.

$$
\begin{aligned}
|T_s u - T_s v|_{H^{2,p}} &= |L_s^{1-}(H_s) + L_s^{-1}E_s(v) - L_s^{-1}(H_s) - L_s^{-1}E_s(u)|_{H^{2,p}} \\
&\leq |E_s(v) - E_s(u)|_{H^{2,p}} \\
&\leq |E_s(v) - E_s(u)|_{L^p} + |L_s^{-1}E_s(v) - L_s^{-1}E_s(u)|_{L^p} \\
&\leq |E_s(v) - E_s(u)|_{L^p} + \frac{1}{\lambda_s}|E_s(v) - E_s(u)|_{L^p} \\
&\leq (1 + \frac{2}{\lambda_0})|E_s(v) - E_s(u)|_{L^p} \\
&\leq s^{1-\sigma}K(|\nabla v - \nabla u|_{L^p} + |\nabla^2 v - \nabla^2 u|_{L^p}) \\
&\leq s^{1-\sigma}K|v-u|_{H^{2,p}}\ .
\end{aligned}
$$

$s_4 := \min\big\{K^{-1/1-\sigma}, 1\big\}$ erfllt die Behauptung. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es also einen eindeutigen Fixpunkt $u_s = \lim_{n\longrightarrow\infty} T^n(0)$ in $\mathcal{K}(s,\sigma)$. Man hat also folgenden

**Satz 6.3.7** *Fr alle $|s| < s_5 = \min\{s_1, \ldots, s_4\}$ gibt es einen Schnitt $u_s \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathcal{M}, \boldsymbol{N}\mathcal{M})$ mit* **“FPUNKT**

$$
H^{\perp}(s\nu + u_s) = 0, \quad |u_s|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathcal{M},\boldsymbol{N}\mathcal{M})} \leq sK_s, \quad |u_s|_{H^{2,p}(\mathcal{M},\boldsymbol{N}\mathcal{M})} \leq sK_s\ .
$$

Whle nun $p = 2n$. Dann ist $2 - n/p = 3/2 > 1$, und man hat man nach dem Sobolevschen Einbettungssatz 2.5.2 $|u_s|_{\mathcal{C}^1} \leq Cs$. Verkleinert man $s_5$ ntigenfalls so, da $Cs_5 \leq \varepsilon_0$, so ist nach Lemma 6.1.1 auch $H_s(u_s) = 0$.
$\mathcal{M}_s := \mathcal{M}_{u_s}$ ist nach der Konstruktion also eine Minimalfche. Insgesamt erhlt man so eine Schar von Minimalfchen $F = \{\mathcal{M}_s \big| |s| < s_5\}$.

## 6.4 $\mathcal{F}$ ist eine $\mathcal{C}^0$-Bltterung

**Satz 6.4.1** *Die Bltter von $\mathcal{F}$ schneiden sich nicht.*

**Beweis** Angenommen, es gibt ein $p \in \mathcal{M}_s \cap \mathcal{M}_t$ mit $s < t$, dann ist $u_s(p) - u_t(p) = 0$ und deswegen $\max(u_s - u_t) \geq 0$. Auf dem Rand von $M$ ist aber $u_s - u_t = s - t < 0$, damit ergibt sich ein Widerspruch zum Maximumprinzip 2.5.5. □

Sei $V := \{x \in \vee : x \notin \mathcal{M}_\sigma \quad \forall \quad |\sigma| < s_1\}$.

**Lemma 6.4.2** *Der Rand jeder Zusammenhangskomponente von $V$ ist von der*“**UELIMES** *Form $\mathcal{M}_s \cup \widehat{\mathcal{M}}_s$. Dabei ist $\widehat{\mathcal{M}}_s$ Minimalfche, und es gilt $\partial\widehat{\mathcal{M}}_s = \partial\mathcal{M}_s = \partial M_s$.*

**Beweis** Sei $p \in V$ so, da $p = \rho\nu(x)$ und ohne Einschrnkung $\rho > 0$. $s\nu + u_s(x)$ ist streng monoton in $s$, weil $F$ keine Schnitte hat. Deswegen existiert entweder $\min\{s \in \mathbb{R} : s\nu + u_s(x) > \rho\}$ oder $\max\{s \in \mathbb{R} : s\nu + u_s(x) < \rho\}$.
**Fall 1:** $\sigma := \min\{s \in \mathbb{R} : s\nu + u_s(x) > \rho\}$ existiert.
$\mathcal{M}_\sigma$ ist also Teil des Randes der Zusammenhangskomponente.
Sei jetzt $\widehat{u}_\sigma(x) := \sup_{s<\sigma} u_s(x)$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \nearrow \sigma$, dann konvergiert $u_{s_n}$ punktweise gegen $u_\sigma$. Aber es gilt $|u_{s_n}|_{\mathcal{C}^2} \leq C|u_{s_n}|_{\mathcal{C}^0} \leq C|\widehat{u}_\sigma|_{\mathcal{C}^0}$, weil $\mathcal{M}_{s_n}$ Minimalfchen sind. Die Folge $u_{s_n}$ ist also auch in $\mathcal{C}^2_0(\mathcal{M}, \boldsymbol{N}\mathcal{M})$ beschrnkt und konvergiert dort gegen $\widehat{u}_\sigma$.
$H^\perp$ ist auf $\mathcal{C}^2_0(\mathcal{M}, \boldsymbol{N}\mathcal{M})$ stetig und deswegen ist $H^\perp(u_\sigma) = 0$. $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma := M_{\widehat{u_\sigma}}$ ist also Minimalfche.
Offensichtlich ist $\partial\mathcal{M}_\sigma = \partial\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$. Deswegen ist $\mathcal{M}_\sigma \cup \widehat{\mathcal{M}}_\sigma$ der Rand der Zusammenhangskomponente von $V$, in der $p$ liegt.
**Fall 2** analog. □

**Lemma 6.4.3** $V = \emptyset$

**Beweis** $H(\widehat{u}_\sigma) = H(u_\sigma) = 0$ und deswegen ist fr $v := (\widehat{u}_\sigma - u\sigma)$ auch $H(v) = 0$ und $v\big|_{\partial M} = 0$. Nach dem Maximumprinzip 2.5.5 ist dann $v \leq 0$ auf $M$. Mit demselben Argument erhlt man auch $-v \leq 0$ auf $M$. Aus $\widehat{u}_\sigma = u_\sigma$ erhlt man nun die Behauptung. $\square$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} v \colon M \times [-\rho, \rho] &\longrightarrow \mathcal{O} \subset \widetilde{M} \\ (x, s) &\longmapsto \tau \circ v_s(x) \end{aligned}$$

ist ein Homomorphismus. $M \times [-\rho, \rho]$ ist kompakt und $\rho > 0$, deswegen ist $\inf_{(x,s) \in M \times [-\rho,\rho]} |v_s(x)| =: \varepsilon > 0$. $\mathcal{O}$ enthlt also die Tubenumgebung $\mathcal{T}_\varepsilon(f)$. Die Niveauflchen $\{v = \text{const}\} = M_{v_s} =: \mathcal{M}_s$ von $v$ sind nach der Konstruktion immersierte Minimalflchen.

**Lemma 6.4.4** $\mathcal{F} := \{\mathcal{M}_s : s \in [-\rho, \rho]\}$ *ist* $\mathcal{C}^0$*-Bltterung*

**Beweis** Es ist nur noch 4) in 5.1.1 nachzuweisen. Ist $x \in \mathcal{O}$, $U \subset \boldsymbol{N}M$ eine Umgebung von $v^{-1}(x)$ und $\varphi \colon U \longrightarrow V \times [-\rho, \rho]$ eine lokale Trivialisierung des Normalenbndels, so ist

$$h := v \circ \varphi^{-1} \colon V \times [-\rho, \rho] \longrightarrow v(U)$$

ein Homomorphismus, und es gilt fr alle $s \in [-\rho, \rho]$ da $h(V \times \{s\}) = v_s(\pi(U)) \subset \mathcal{M}_s$. $\square$

**Satz 6.4.5** *Ist $M$ kompakte, orientierbare $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f \colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ isometrische, minimale, stabile Immersion, so gibt es ein Feld $\mathcal{F}$ zu $M$ in $\widetilde{M}$.*

**Korollar 6.4.6** (Hauptsatz) *Ist $f \colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ wie oben, so ist $M$ ein starkes homologisches Minimum des Flcheninhalts in der Klasse der Flchen mit gleichem Rand.*

# 7 Abschtzungen fr $E_s$

## 7.1 Beweis von 6.3.5

Sei $G := G(s,t,x) := \big(g_{ij}(s\nu + tu)(x)\big) = (\psi + s\nu + tu)_{x_i}(\psi + s\nu + tu)_{x_j}\big|_x$, $G_t :=$ $\big(\frac{d}{dt} g_{ij}(s\nu + tu)\big)$ und $\|A\| := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ fr $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

**Lemma 7.1.1** *Sei $|\nabla u| \le 1$ und $|\nabla^2 u| \le 1$. Es gibt eine Konstante $K > 0$ so,*“**GABSCH** *da fr $0 \le t \le 1$ gilt:*

*a)* $$\|G\|, \|G^{-1}\| \le K$$

*b)* $$\|G_t\|, \|G_t^{-1}\| \le K|\nabla u|$$

*c)* $$\|G_{tt}\|, \|G_{tt}^{-1}\| \le K|\nabla u|^2$$

*d)* $$\|G_{x_i}\|, \|G_{x_i}^{-1}\| \le K(1 + |\nabla u||\nabla^2 u|)$$

*e)* $$\|G_{tx_i}\|, \|G_{tx_i}^{-1}\| \le K(|\nabla u| + |\nabla^2 u| + |\nabla u||\nabla^2 u|)$$

*f)* $$\|G_{ttx_i}\|, \|G_{ttx_i}^{-1}\| \le K(|\nabla u|^2 + |\nabla^2 u| + |\nabla u||\nabla^2 u|$$

*g)* $$|(\det G)_t| \le K|\nabla u|$$

*h)* $$|(\det G)_{tt}| \le K|\nabla u|^2$$

*i)* $$|(\det G)_{x_i}|, |(\det G)_{tx_i}|, |(\det G)_{ttx_i}| \le K\ .$$

**Beweis** Sei $\psi$ eine Karte von $M_s$, dann gilt fr die Ableitungen der Metrik:

$$\begin{aligned}
g_{ij}(v\nu + tu) =: g(s,t) &= (\psi + s\nu + tu)_{x_i}(\psi + s\nu + tu)_{x_j} \\
&= \psi_{x_i}\psi_{x_j} + s(\psi_{x_i}\nu_{x_j} + \nu_{x_i}\psi_{x_j}) + t(u_{x_i}\psi_{x_j} + \psi_{x_i}u_{x_j}) \\
&\quad + s^2\nu_{x_i}\nu_{x_j} + st(\nu_{x_i}u_{x_j} + u_{x_i}\nu_{x_j}) + t^2 u_{x_i}u_{x_j} \\
\frac{d}{dt} g_{ij}(s,t) &= u_{x_i}\psi_{x_j} + u_{x_j}\psi_{x_i} + s(\nu_{x_i}u_{x_j} + u_{x_i}\nu_{x_j}) + 2t u_{x_i}u_{x_j} \\
\frac{d^2}{dt^2} g_{ij}(s,t) &= 2u_{x_i}u_{x_j} \\
\frac{d}{ds} g_{ij}(s,t) &= \nu_{x_i}\psi_{x_j} + \psi_{x_i}\nu_{x_j} + t(\nu_{x_i}u_{x_j} + u_{x_i}\nu_{x_j}) + 2s\nu_{x_i}\nu_{x_j} \\
\frac{d^2}{dtds} g_{ij}(s,t) &= \nu_{x_i}u_{x_j} + u_{x_i}\nu_{x_j} \\
\frac{d^3}{dt^2 ds} g_{ij}(s,t) &= 0\ .
\end{aligned}$$

$M$ und damit $M_s$ sind kompakt. Deswegen sind $u$, $\psi$, $\psi_{x_i}$ und $\psi_{x_i x_j}$ fr jede Kartenwahl beschrnkt. Daraus kann man die linken Teile der Behauptungen $a)$ bis $f)$ und die Punkte $g)$ und $h)$ direkt ablesen.
Die Inversionsabbildung $F\colon A \mapsto A^{-1}$ ist eine stetige Abbildung von $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ auf sich. $G([0,1]^2 \times M)$ ist kompakt, und deshalb ist $F$ auf $G([0,1]^2 \times M)$ beschrnkt. Dies ist die Aussage der Behauptung $a)$.
Fr $r \in \{t, x_1, \ldots, x_n\}$ gilt $0 = (GG^{-1})_r = G_r G^{-1} + G G_r^{-1}$ und damit $G_r^{-1} = G^{-1} G_r G^{-1}$. Also:

$b)$ $$G_t^{-1} = G^{-1} G_t G^{-1}$$

$c)$ $$\begin{aligned} G_{tt}^{-1} &= \big(G_t^{-1}\big)_t = \big(G^{-1} G_t G^{-1}\big)_t \\ &= G_t^{-1} G_t G^{-1} + G^{-1} G_{tt} G^{-1} + G^{-1} G_t G_t^{-1} \end{aligned}$$

$d)$ $$G_{x_i}^{-1} = G^{-1} G_{x_i} G^{-1}$$

$e)$ $$\begin{aligned} G_{tx_i}^{-1} &= \big(G_t^{-1}\big)_{x_i} = \Big(G^{-1} G_t G^{-1}\Big)_{x_i} \\ &= G_{x_i}^{-1} G_t G^{-1} + G^{-1} G_{tx_i} G^{-1} + G^{-1} G_t G_{x_i}^{-1} \end{aligned}$$

$f)$ $$\begin{aligned} G_{ttx_i}^{-1} &= \big(G_{tx_i}^{-1}\big)_t \\ &= G_{x_i t}^{-1} G_t G^{-1} + G_{x_i}^{-1} G_{tt} G^{-1} + G_{x_i}^{-1} G_t G_t^{-1} \\ &\quad + G_t^{-1} G_{x_i t} G^{-1} + G^{-1} G_{ttx_i} G^{-1} + + G^{-1} G_{tx_i} G_t^{-1} \\ &\quad + G_t^{-1} G_t G_{x_i}^{-1} + G^{-1} G_{tt} G_{x_i}^{-1} + G^{-1} G_t G_{x_i t}^{-1} \end{aligned}$$

Durch sukzessives Einsetzen der schon gewonnenen Abschtzungen gewinnt man die Behauptungen $b)$ bis $f)$ wenn man ausntzt, da die jeweils kleineren Potenzen von $|\nabla u|$ und $|\nabla^2 u|$ die greren dominieren.
Die Determinantenfunktion $\det G(s,t,x)$ ist ein Polynom in $t$ und $x_i$. Deswegen ist sie und ihre Ableitungen beschrnkt auf $[0,1]^2 \times M$, dies impliziert $i)$. □

## 7.2 Beweis der ersten Ungleichung:

$$E(u) = \int_0^1 (1-t) \frac{d^2 H^\perp}{dt^2}(s,t)\, dt$$

Es reicht zu zeigen, da fr $0 \le t \le 1$ gilt

$$\Big| \frac{d^2 H^\perp}{dt^2}(s,t) \Big| \le K\big(|\nabla u|^2 + |\nabla u||\nabla^2 u|\big)$$

Dazu reicht es, $\frac{d^2}{dt^2}H_i$ abzuschtzen. Ausdifferenzieren ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}H_1(s,t) =& \frac{2tg_t^2(s,t) - tg(s,t)g_{tt}(s,t) - 3g(s,t)g_t(s,t)}{4g^3(s,t)} g_{x_i}(s,t)g^{ij}(s,t)u^\perp_{x_j} \\
&+ \frac{2g(s,t) - tg_t(s,t)}{2g^2(s,t)}\Big(g_{tx_i}(s,t)g^{ij}(s,t) + g_{x_i}(s,t)g_t^{ij}(s,t)\Big)u^\perp_{x_j} \\
&+ \frac{t}{2g(s,t)}\Big(g_{ttx_i}(s,t)g^{ij}(s,t) + g_{x_i}(s,t)g_{tt}^{ij}(s,t)\Big)u^\perp_{x_j} \\
&+ \frac{t}{g(s,t)}g_{tx_i}(s,t)g_t^{ij}(s,t)u^\perp_{x_j} \\
\frac{d^2}{dt^2}H_2(s,t) =& 2g^{ij}_{tx_j}(s,t)u^\perp_{x_j} + tg^{ij}_{ttx_j}(s,t)u^\perp_{x_j} \\
\frac{d^2}{dt^2}H_3(s,t) =& g^{ij}_{tt}(s,t)(\psi^\perp + s\nu)_{x_ix_j} \\
\frac{d^2}{dt^2}H_4(s,t) =& 2g^{ij}_t(s,t)u^\perp_{x_ix_j} + tg^{ij}_{tt}(s,t)u^\perp_{x_ix_j}\ .
\end{aligned}$$

Wenn man die Abschtzungen aus Lemma 7.1.1 einsetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{d^2}{dt^2}H_1(s,t)\Big| \leq& K\big(|\det G_t(s,t)||\nabla u| + |\det G_{tt}(s,t)||\nabla u| \\
&\quad + \|G_t^{-1}(s,t)\||\nabla u| + \|G_{tt}^{-1}(s,t)\||\nabla u|\big) \\
\leq& K\big(|\nabla u|^2|\nabla u|^3 + |\nabla u|^2 + |\nabla u|^3\big) \\
\leq& K|\nabla u|^2 \\
\Big|\frac{d^2}{dt^2}H_2(s,t)\Big| \leq& K\big(\|G^{-1}_{tx_i}(s,t)\||\nabla u| + \|G^{-1}_{ttx_i}(s,t)\||\nabla u|\big) \\
\leq& K\big(|\nabla u|^2 + |\nabla u||\nabla^2 u| + |\nabla u|^2|\nabla^2 u| \\
&\quad + |\nabla u|^3 + |\nabla u||\nabla^2 u| + |\nabla u|^2|\nabla^2 u|\big) \\
\leq& K\big(|\nabla u|^2 + |\nabla u||\nabla^2 u|\big) \\
\Big|\frac{d^2}{dt^2}H_3(s,t)\Big| \leq& K\|G^{-1}_{tt}(s,t)\| \leq K|\nabla u|^2 \\
\Big|\frac{d^2}{dt^2}H_4(s,t)\Big| \leq& K\big(\|G^{-1}_t(s,t)\||\nabla^2 u| + \|G^{-1}_{tt}(s,t)\||\nabla^2 u|\big) \\
\leq& K\big(|\nabla u||\nabla^2 u| + |\nabla u|^2|\nabla^2 u|\big) \\
\leq& K|\nabla u||\nabla^2 u|\ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

## 7.3 Beweis der zweiten Ungleichung

$$
\begin{aligned}
|E(u)-E(v)|_{L^p} &= \Big| \int_0^1 (1-t)\big(\frac{d^2}{dt^2} H^\perp(tu) - \frac{d^2}{dt^2} H^\perp(tv)\big) dt \Big|_{L^p} \\
&\leq \Big| \frac{d^2}{dt^2} H^\perp(tu) - \frac{d^2}{dt^2} H^\perp(tv) \Big|_{L^p} .
\end{aligned}
$$

Die Behauptung ergibt sich aus der folgenden Rechnung fr die einzelnen Summanden.

$$
\begin{aligned}
\Big| \frac{d^2}{dt^2} H_3^\perp(tu) - \frac{d^2}{dt^2} H_3^\perp(tv) \Big| \leq & K \big| g_{tt}^{ij}(tu) - g_{tt}^{ij}(tv) \big| \\
\leq & K \big| |\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 \big| \\
\leq & K \big| |\nabla u| - |\nabla v| \big|^2 \\
\leq & K |\nabla (u-v)|^2 \\
\leq & K r |\nabla (u-v)| .
\end{aligned}
$$

Die Metrik und ihre Ableitungen sind punktweise Polynome in $u_{x_i}, \ldots, u_{x_n}$, deswegen $\mathcal{C}^1$ und damit Lipschitz-stetig. Dasselbe gilt auch fr die Determinate der Metrik und ihrer Ableitungen. $Q$ sei die gemeinsame Lipschitz-Konstante. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\Big| \frac{d^2}{dt^2} H_2^\perp(tu) - \frac{d^2}{dt^2} H_2^\perp(tv) \Big| \leq & 2 \big| g_{tx_i}^{ij}(tu) u_{x_i}^\perp - g_{tx_i}^{ij}(tv) v_{x_i}^\perp \big| \\
& + t \big| g_{ttx_i}^{ij}(tu) u_{x_i}^\perp - g_{ttx_i}^{ij}(tv) v_{x_i}^\perp \big|
\end{aligned}
$$

und folglich

$$
\begin{aligned}
& \big| g_{tx_i}^{ij}(tu) u_{x_i}^\perp - g_{tx_i}^{ij}(tu) v_{x_i}^\perp + g_{tx_i}^{ij}(tu) v_{x_i}^\perp - g_{tx_i}^{ij}(tv) v_{x_i}^\perp \big| \\
\leq & \big| g_{tx_i}^{ij}(tu)(u_{x_i}^\perp - v_{x_j}^\perp) \big| + \big| (g_{tx_i}^{ij}(tv) - g_{tx_i}^{ij}(tv)) v_{x_i}^\perp \big| \\
\leq & |g_{tx_i}^{ij}(tu)| |\nabla(u-v)| + |\nabla v| |g_{tx_i}^{ij}(tv) - g_{tx_i}^{ij}(tv)| \\
\leq & |g_{tx_i}^{ij}(tu)| |\nabla(u-v)| + |\nabla v| Q |\nabla(u-v)| \\
\leq & \big( K(|\nabla u|^2 + |\nabla^2 u| + |\nabla u| |\nabla^2 u|) + Q|\nabla v| \big) |\nabla(u-v)| \\
\leq & K r |\nabla(u-v)|.
\end{aligned}
$$

Der zweite Term und die Abschtzungen fr $H_1$ gehen analog.

$$
\begin{aligned}
\Big| \frac{d^2}{dt^2} H_4^\perp(tu) - \frac{d^2}{dt^2} H^\perp(tv) \Big| \leq & 2 \big| g_t^{ij}(tu) u_{x_i x_j}^\perp - g_t^{ij}(tv) v_{x_i x_j}^\perp \big| \\
& + t \big| g_{tt}^{ij}(tu) u_{x_i x_j}^\perp - g_{tt}^{ij}(tv) v_{x_i x_j}^\perp \big|
\end{aligned}
$$

Der erste Term wird jetzt exemplarisch abgeschtzt

$$
\begin{aligned}
&\left|g_t^{ij}(tu)u^\perp_{x_ix_j} - g_t^{ij}(tu)v^\perp_{x_ix_j} + g_t^{ij}(tu)v^\perp_{x_ix_j} - g_t^{ij}(tv)v^\perp_{x_ix-j}\right| \\
\leq &\left|g_t^{ij}(tu)(u^\perp_{x_ix_j} - v^\perp_{x_jx_j})\right| + \left|(g_t^{ij}(tv) - g_t^{ij}(tv))v^\perp_{x_ix_j}\right| \\
\leq &|g_t^{ij}(tu)||\nabla^2(u-v)| + |\nabla^2 v|Q|\nabla(u-v)| \\
\leq &K|\nabla u||\nabla^2(u-v)| + Q|\nabla v||\nabla(u-v)| \\
\leq &Kr(|\nabla(u-v)| + |\nabla^2(u-v)|).
\end{aligned}
$$

$\square$

# 8 Simultane Feldkonstruktion

Wir konstruieren in diesem Kapitel ein $\mathcal{C}^{2,\alpha}$-Immersion

$$g : M \times [-\rho, \rho] \longrightarrow \widetilde{M},$$

so da die Niveauflchen $M_s := g(M \times \{s\})$ in $\widetilde{M}$ Minimalflchen sind, und da gilt $g(x, s) = \tau(s\nu(x))$ auf $\partial M$ und $g(x, 0) = f(x)$ auf $M$.
Dazu konstuieren wir eine $\mathcal{C}^{2,\alpha}$-Injektion

$$u : M \times [-\rho, \rho] \longrightarrow \widetilde{M},$$

so da

$$g(x, s) := \tau(su(x, s)) = \exp_{f(x)}(su(s, x)) \ .$$

Offensichtlich ist dann $g(0, x) = f(x)$, und wir mssen fr alle $s \in [-\rho, \rho]$ erreichen, da

$$u(x, s) = \nu \text{ auf } \partial M.$$

Sei $s \in [-\rho, \rho]$ fest. Dann ist

$$h(x, t) := \tau(tsu(x, s))$$

eine glatte Variation von $f$, und es gilt

$$\begin{aligned} h_0(x) &:= h(x, 0) = \tau(0) = f(x) \\ h_1(x) &:= h(x, 1) = \tau(su(x, s)) = g(x, s) \ . \end{aligned}$$

$f$ ist nach Voraussetzung minimal, deswegen mu man das Problem

$$H(h_1) - H(h_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} H(h_t)\Big|_{t=\tau} d\tau = 0 \tag{8.0.1}$$

lsen. Nun ist aber

$$\frac{d}{dt} H(h_t)\Big|_{t=\tau} = L_{h_t}(su_s),$$

dabei ist $L_{h_t}$ der Jacobioperator von $h_t$. Mit den Bezeichnungen $\mathcal{L}_t := L_{h_t}$ und $\mathcal{L} := \mathcal{L}_0$ schreibt sich 8.0.1 als

$$s \int_0^1 \mathcal{L}_t u_s dt = 0 \ .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_s &= \int_0^1 (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_t)u_s dt \\ &= -\int_0^1 \int_0^t \frac{d}{d\sigma}\mathcal{L}_\sigma u_s d\sigma dt \ .\end{aligned}$$

**Lemma 8.0.2** *Es gibt eine glatte Funktion $G$, so da*

$$-\int_0^1 \int_0^t \frac{d}{d\sigma}\mathcal{L}_\sigma u_s d\sigma dt = sG(x, s, u, \nabla u, \nabla^2 u).$$

**Beweis** kommt noch
Nun ist aber der kleinste Eigenwert $\lambda$ des Jacobi-Operators $\mathcal{L} = L_f$ positiv, deswegen ist $\mathcal{L}$ nach 3.4.3 invertierbar. Es gibt also genau eine Lsung $v \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M, NM)$ der Randwertaufgabe

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}(v) &= 0 \text{ auf } M \\ v &= \nu \text{ auf } \partial M\end{aligned}\right\} \ .$$

Setzen wir

$$\tilde{u} := u - v$$

und

$$H(x, s, \tilde{u}, \nabla\tilde{u}, \nabla^2\tilde{u}) := g(x, s, u + v, \nabla(u + v), \nabla^2(u + v)),$$

so knnen wir 8.0.1 in der folgenden Form schreiben

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}\tilde{u} &= \sigma \cdot H(x, s, \tilde{u}, \nabla\tilde{u}, \nabla^2\tilde{u}) \text{ auf } M \\ \tilde{u} &= 0 \text{ auf } M\end{aligned}\right\} 8.0.3$$

oder wegen der Invertierbarkeit von $\mathcal{L}$ als

$$\tilde{u}(x, s) = s \cdot \mathcal{L}^{-1} H(x, s, \tilde{u}(x), \nabla\tilde{u}(x), \nabla^2\tilde{u}(x)) \ .$$

Durch

$$\boldsymbol{T}U(x, s) := s \cdot \mathcal{L}^{-1} H(x, s, U(x), \nabla U(x), \nabla^2 U(x))$$

definieren wir einen stetigen Operator

$$\boldsymbol{T} : \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(M \times [-\rho, \rho], NM) \longrightarrow \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(M \times [-\rho, \rho], NM).$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
&|TU - TV|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(M\times[-\rho,\rho],NM)} \\
&\leq s|\mathcal{L}^{-1}\big(H(\cdot,\cdot,U,\nabla U,\nabla^2 U) - H(\cdot,\cdot,V,\nabla V,\nabla^2 V)\big)|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(M\times[-\rho,\rho],NM)} \\
&\leq \rho\|\mathcal{L}^{-1}\||H(\cdot,\cdot,U,\nabla U,\nabla^2 U) - H(\cdot,\cdot,V,\nabla V,\nabla^2 V)|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(M\times[-\rho,\rho],NM)} \\
&\leq \rho\|\mathcal{L}^{-1}\|\omega|U - V|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(M\times[-\rho,\rho],NM)}
\end{aligned}$$

Dabei ist $\omega$ der Stetigkeitsmodul von $H$. Fr hinreichend kleine $\rho > 0$ ist der Operator $\boldsymbol{T}$ in der $\mathcal{C}^{2,\alpha}$-Norm eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es einen eindeutigen Fixpunkt $\tilde{u} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M \times [-\rho,\rho], NM)$. $u(x,s) := \tilde{u}(x,s) + v(x)$ lst dann das Problem und ist von der Klasse $\mathcal{C}^{2,\alpha}(M\times[-\rho,\rho],NM)$. Wir haben also mit $g(x,s) := \tau(su(x,s))$ eine Funktion $g \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M\times[-\rho,\rho],NM)$ konstruiert, deren Niveauflchen $g(\{s = \text{const}\})$ Minimalflchen sind. Analog zu der Argumentation in 6.4.0 erhalten wir, da die Niveauflchen von $g$ eine $\mathcal{C}^{2,\alpha}$-Bltterung ergeben.

# 9 Literaturliste


[A] T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Monifolds. Monge-Ampere Equations*, Springer Verlag, 1982.

[BC] C. Br, *Private Korrespondez*

[BP] P. H. Bérard, *Spectral Geometry: Direct and Inverse Problems*, Lecture Notes in Mathematics **1207**, Springer-Verlag, 1986.

[CC] C. Caratheodory *Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung* Teubner, 1935.

[CH] C. Chevalley *Theory of Lie Groups* Princeton University Press, 1946.

[GH] M. Giaguinta und S. Hildebrandt, *Calculus of Variations, Vol 1*, Preprint, Bonn, 1988.

[GT] D. Gilbarg und N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, New York, 1977.

[HL] R. Harvey und H.B. Lawson, *Calibrated Geometries*, Acta Math. **184** (1982), 47-157.

[HS] S. Hildebrandt, *Vorlesungsskriptum Variationsrechnung* Bonn, 1975.

[LB] H.B. Lawson, *Lectures on Minimal Submanifolds Vol.1*, Publish or Perish INC. 1980.

[LL] L. Lichtenstein, *Untersuchungen ber zweidimsionale regulre Variationsprobleme I*, Monatshefte fr Mathematik und Physik **28** (1917), 3-51.

[LX] X. Li, *Eine hinreichende Bedingung fr Minima und Verzweigungsprobleme fr mehrfache Variationsintegrale*, Diplomarbeit (1985), Bonn.

[M] C. B. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer Verlag, New York, 1966.

[P] R. S. Palais, *Foundations of global non-linear analysis*, W. A. Benjamin, INC., New York Amsterdam, 1968.

[SB] B. Solomon, *On Foliations of* $\mathbb{R}^{n+1}$ *by minimal hypersurfaces* Comment. Math. Helvet. **61** (1986), 67-83.

[SL] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory* Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis. Australian National University. Volume **3**, 1983.

[SN] N. Smale, *A Bridge Principle for Minimal and Constant Mean Curvature Submanifolds of* $\mathbb{R}^N$, Inventiones Math. **90** (1987) 505-549.

[Y] K. Yosida, *Functional Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzelderstellungen Band **123**, Springer Verlag, 1968.